9 No.2 (2025): Journal Scientific MQRInvestigar ISSN: 2588–0659
https://doi.org/10.56048/MQR20225.9.2.2025.e570

The use of graphical representations as a didactic strategy to improve the learning of trigonometric functions

El uso de representaciones gráficas como estrategia didáctica para mejorar el aprendizaje de las funciones trigonométricas

Autores:

Gadvay-Yambay, Martha Fabiola
UNIVERSIDAD TÉCNICA DE MANABÍ
Maestrante, Facultad de Posgrado
Manabí-Ecuador

mgadvay9476@utm.edu.ec

https://orcid.org/0009-0002-1497-6349

Guerrero-Alcívar, Yandri
UNIVERSIDAD TÉCNICA DE MANABÍ
Maestrante, Facultad de Ciencias Básicas
Manabí-Ecuador

yandri.guerrero@utm.edu.ec

https://orcid.org/0000-0002-5759-9013

Fechas de recepción: 15-ABR-2025 aceptación: 15-MAY-2025 publicación: 30-JUN-2025

https://orcid.org/0000-0002-8695-5005
http://mqrinvestigar.com/

Resumen

El aprendizaje de las funciones trigonométricas es un desafío para muchos estudiantes debido a su naturaleza abstracta y la necesidad de dominar varios conceptos matemáticos simultáneamente. Las estrategias didácticas, especialmente las representaciones gráficas, resultan esenciales para facilitar este aprendizaje, permitiendo a los estudiantes visualizar la periodicidad y la naturaleza ondulatoria de las funciones trigonométricas, lo que ayuda a una mejor comprensión de conceptos como la amplitud, frecuencia y fase. Este estudio se centra en el impacto de las representaciones gráficas en el aprendizaje de trigonometría en estudiantes de primero de bachillerato, con un análisis específico de los beneficios y recursos didácticos que pueden implementarse en el aula. A través de una intervención educativa con el uso de GeoGebra, se compararon dos grupos de estudiantes: uno con apoyo visual mediante gráficas y otro con enseñanza tradicional. Los resultados mostraron que el grupo que utilizó GeoGebra obtuvo un rendimiento significativamente superior. Las pruebas t y ANOVA revelaron diferencias estadísticamente significativas en el aprendizaje, indicando que las gráficas ayudan a superar barreras en la comprensión de conceptos abstractos. Los hallazgos respaldan la integración de herramientas tecnológicas en la enseñanza de trigonometría, promoviendo un aprendizaje activo y mejorando la retención de conocimientos y motivación. Se recomienda que los docentes incorporen gráficos ilustrativos y herramientas interactivas para enriquecer la enseñanza de funciones trigonométricas y mejorar los resultados académicos en matemáticas. The findings support the integration of technological tools in the teaching of trigonometry, promoting active learning and improving knowledge retention and motivation. It is recommended that teachers incorporate illustrative graphics and interactive tools to enrich the teaching of trigonometric functions and improve academic results in mathematics.

Palabras clave: Trigonometría; Representaciones gráficas; GeoGebra; Aprendizaje visual; Rendimiento académico

Abstract

Learning trigonometric functions is a challenge for many students due to their abstract nature and the need to master several mathematical concepts simultaneously. Teaching strategies, especially graphical representations, are essential to facilitate this learning, allowing students to visualize the periodicity and wave nature of trigonometric functions, which aids in a better understanding of concepts such as amplitude, frequency, and phase. This study focuses on the impact of graphical representations on trigonometry learning in first-year high school students, with a specific analysis of the benefits and didactic resources that can be implemented in the classroom. Through an educational intervention with the use of GeoGebra, two groups of students were compared: one with visual support through graphs and the other with traditional teaching. The results showed that the group that used GeoGebra performed significantly better. The t-tests and ANOVA revealed statistically significant differences in learning, indicating that graphs help overcome barriers to understanding abstract concepts.

Keywords: Trigonometry; Graphical representations; Visual learning; Academic performance; GeoGebra; Trigonometry; Visual learning

Introducción

El aprendizaje de las funciones trigonométricas ha sido tradicionalmente un reto para muchos estudiantes, principalmente por su alto nivel de abstracción y la necesidad de comprender múltiples conceptos matemáticos simultáneamente. Aspectos como el manejo de ángulos, radianes, razones trigonométricas y su relación con las gráficas requieren de una comprensión profunda y una habilidad para visualizar cómo estos elementos interactúan entre sí.

En este contexto, las estrategias didácticas juegan un papel crucial para facilitar el aprendizaje de las funciones trigonométricas. Las representaciones gráficas son una de estas estrategias, ya que permiten a los estudiantes visualizar y comprender mejor la naturaleza cíclica y ondulatoria de las funciones seno, coseno y tangente. A través de las gráficas, los alumnos pueden observar patrones, identificar propiedades y realizar conexiones entre los conceptos matemáticos y sus aplicaciones prácticas.

Este artículo se centrará en la importancia de utilizar representaciones gráficas como una herramienta didáctica efectiva para mejorar el aprendizaje de las funciones trigonométricas en Primero Bachillerato del colegio Remigio Geo Gómez Guerrero de Huaquillas. Además, se analizarán los beneficios de esta estrategia y se propondrán actividades y recursos que pueden ser implementados en el aula para maximizar su impacto educativo.

Dificultades Comunes en el Aprendizaje de las Funciones Trigonométricas

El estudio de las funciones trigonométricas puede ser una de las áreas más complejas dentro de las matemáticas a nivel secundario o universitario. Muchos estudiantes experimentan dificultades para comprender conceptos fundamentales como los ángulos en radianes, las razones trigonométricas (seno, coseno, tangente) y su representación gráfica (Cordero & Flores 2007). A continuación, se mencionan algunas de las barreras más comunes que enfrentan los estudiantes en este tema:

1. **Abstracción Matemática**: Las funciones trigonométricas se basan en conceptos abstractos que, sin una representación visual clara, pueden resultar difíciles de entender. La relación entre los ángulos y las razones trigonométricas, por ejemplo, no siempre es intuitiva para los estudiantes, lo que complica su comprensión.
2. **Desconexión entre las Definiciones Algebraicas y sus Representaciones Gráficas**: Muchos estudiantes tienden a memorizar las fórmulas de seno, coseno y tangente sin entender plenamente su relación con los ángulos y el círculo unitario. Esto lleva a una falta de comprensión sobre cómo estos valores cambian a medida que varía el ángulo, lo que hace más difícil interpretar sus gráficas.

3. **Falta de Visualización Espacial**: La trigonometría implica comprender la relación entre las medidas angulares y las distancias, lo que requiere habilidades de visualización espacial. Sin representaciones visuales claras, los estudiantes pueden tener dificultades para conectar las funciones trigonométricas con fenómenos del mundo real, como el movimiento ondulatorio o las frecuencias.
4. **Poca Relación con el Contexto Real**: A menudo, la trigonometría se enseña de manera muy teórica, sin hacer énfasis en sus aplicaciones prácticas. Esto puede desmotivar a los estudiantes, ya que no perciben cómo estas funciones se aplican a problemas del mundo real, como las señales de audio, el diseño de estructuras o los fenómenos periódicos.

Dado este contexto, es crucial adoptar enfoques didácticos que ayuden a superar estas dificultades. Las representaciones gráficas se presentan como una estrategia prometedora para facilitar la comprensión de las funciones trigonométricas, ya que permiten una visualización concreta y dinámica de estos conceptos abstractos (Aray et al., 2020).

Las Representaciones Gráficas como Estrategia Didáctica

Las representaciones gráficas se han consolidado como una herramienta esencial para la enseñanza de las matemáticas, en especial cuando se trata de conceptos abstractos como las funciones trigonométricas. En el ámbito didáctico, una representación gráfica es una visualización de la relación entre dos o más variables matemáticas, lo que facilita la comprensión de patrones y comportamientos en estas relaciones (Mora, 2003).

En el caso de las funciones trigonométricas, las representaciones gráficas permiten visualizar el comportamiento ondulatorio de funciones como el seno, coseno y tangente, y observar cómo estas varían de manera periódica. Al emplear gráficos, los estudiantes pueden ver de manera directa cómo una función trigonométrica responde al cambio de un ángulo y cómo se relacionan con el círculo unitario (Lucas & Aray, 2023).

Tipos de Representaciones Gráficas Utilizadas en Trigonometría

- **Gráficas de las funciones seno y coseno**: Estas funciones presentan patrones de ondas sinusoidales. Al graficarlas, los estudiantes pueden observar directamente la periodicidad, la amplitud y las fases, elementos fundamentales para su comprensión.
- **Gráfica de la función tangente**: Aunque la función tangente tiene una naturaleza más compleja debido a sus asíntotas verticales, las gráficas permiten que los estudiantes visualicen los puntos de discontinuidad y comprendan cómo la tangente se comporta para valores de ángulos cercanos a los múltiplos de 2π.

- **Círculo unitario**: Este es uno de los recursos gráficos más poderosos en la enseñanza de trigonometría. Al visualizar las funciones trigonométricas en el contexto del círculo unitario, los estudiantes logran una comprensión más profunda de cómo los ángulos en radianes se relacionan con los valores de seno y coseno en cada cuadrante del círculo.

Beneficios de Utilizar Representaciones Gráficas en la Enseñanza de Funciones Trigonométricas

- **Mejora la comprensión visual**: Las gráficas permiten que los estudiantes visualicen conceptos que, de otra forma, solo serían entendidos de manera abstracta. Esto es especialmente útil para identificar patrones, como la periodicidad o las simetrías de las funciones.
- **Facilita la detección de errores**: Al graficar las funciones, los estudiantes pueden ver claramente si han cometido un error en los cálculos, ya que cualquier anomalía se reflejará en la gráfica.
- **Fomenta la experimentación**: Herramientas tecnológicas como GeoGebra permite que los estudiantes interactúen con las funciones, modificando parámetros como la amplitud, frecuencia o fase para observar los cambios en tiempo real.

El uso de representaciones gráficas no solo mejora la comprensión conceptual de las funciones trigonométricas, sino que también motiva a los estudiantes a explorar y aprender de manera activa. Esta estrategia combina lo abstracto con lo visual, convirtiéndose en un puente entre la teoría y la práctica (Arteaga et al., 2019).

Impacto de las Representaciones Gráficas en el Aprendizaje de Funciones Trigonométricas

El uso de representaciones gráficas en la enseñanza de las funciones trigonométricas tiene un impacto profundo en el aprendizaje, ya que facilita la comprensión visual y permite a los estudiantes interactuar de manera más intuitiva con conceptos matemáticos complejos. Las gráficas no solo hacen más accesibles los aspectos abstractos de las funciones trigonométricas, sino que también fomentan una mejor retención y aplicabilidad de los conocimientos adquiridos (Lino et al., 2023). A continuación, se analizan varios aspectos clave en los que las representaciones gráficas contribuyen positivamente al aprendizaje:

1. Comprensión Visual de los Cambios en las Funciones

Uno de los mayores beneficios de las gráficas es que permiten a los estudiantes visualizar cómo las diferentes propiedades de las funciones trigonométricas, como la **amplitud**,

frecuencia y **fase**, afectan su comportamiento. Por ejemplo, a través de una gráfica de la función seno, los estudiantes pueden observar cómo un aumento en la amplitud amplifica la onda, o cómo una modificación en la frecuencia hace que los ciclos se compriman o se expandan. De esta manera, los alumnos logran entender mejor las características de las funciones y cómo pueden modelarse en situaciones reales (Aray & Párraga 2023).

Además, la **simetría** y la **periodicidad** de las funciones trigonométricas se vuelven más claras mediante las gráficas. Al observar la gráfica del seno o del coseno, los estudiantes pueden ver cómo los valores se repiten a intervalos regulares, lo que refuerza la idea de la periodicidad y permite una mejor anticipación de los valores en diferentes puntos.

2. Fomento del Razonamiento y la Resolución de Problemas

El uso de representaciones gráficas fomenta un enfoque más analítico y razonado en la resolución de problemas (Diaz et al., 2023). Cuando los estudiantes son capaces de visualizar una función trigonométrica, se les facilita realizar deducciones y conexiones lógicas, como:

- La relación entre el ángulo y los valores de las razones trigonométricas.
- Los puntos donde las funciones alcanzan sus valores máximos, mínimos o se anulan.
- El comportamiento de la tangente en los intervalos donde existen asíntotas verticales.

Este razonamiento gráfico es crucial, ya que, en muchos problemas trigonométricos, es más fácil y rápido identificar características de las funciones mediante la observación de la gráfica en lugar de trabajar exclusivamente con cálculos algebraicos. Esto también se aplica en problemas que involucran el uso de las funciones trigonométricas para modelar fenómenos del mundo real, como las ondas sonoras o la trayectoria de los objetos en movimiento (Quijano et al., 2023).

3. Mayor Interacción a través de Herramientas Tecnológicas

Con el desarrollo de herramientas tecnológicas como **GeoGebra**, **Desmos** o **Wolfram Alpha**, los estudiantes tienen la oportunidad de interactuar directamente con las funciones trigonométricas de forma visual y dinámica. Estas plataformas permiten a los alumnos modificar los parámetros de las funciones en tiempo real y observar de inmediato cómo cambian las gráficas (Lucas & Aray, 2023).

Por ejemplo, en **Desmos**, un estudiante puede ajustar la fórmula de una función seno para cambiar la amplitud o la frecuencia y ver inmediatamente cómo estos cambios afectan la gráfica. Esta interacción facilita un aprendizaje más profundo, ya que los estudiantes no solo observan los resultados de manera pasiva, sino que pueden manipular los parámetros y experimentar con las funciones, lo que refuerza la comprensión de manera significativa.

4. Conexión con Aplicaciones Reales

Las gráficas también permiten que los estudiantes vean la conexión entre las funciones trigonométricas y sus aplicaciones en el mundo real. Al representar gráficamente fenómenos como las **ondas de sonido**, **ondas de luz**, o **movimientos pendulares**, los estudiantes pueden identificar la relación entre las matemáticas y la naturaleza. Esta contextualización es especialmente útil para generar motivación, ya que los estudiantes logran ver la utilidad de la trigonometría en problemas físicos y en áreas como la ingeniería, la música o la arquitectura.

Por ejemplo, al modelar una onda de sonido con una función seno, los estudiantes pueden interpretar los efectos del aumento de la amplitud (mayor volumen) o la disminución de la frecuencia (tonos más graves), lo que hace que el aprendizaje sea más significativo y práctico (Lino et al., 2023).

5. Mejora de la Retención y el Rendimiento Académico

Estudios han demostrado que el aprendizaje visual, combinado con la manipulación activa de las gráficas, contribuye a una mejor retención de los conocimientos y a un mayor rendimiento académico. Los estudiantes que aprenden mediante representaciones gráficas suelen ser más capaces de recordar las características de las funciones trigonométricas, identificar errores en sus propios cálculos y aplicar estos conceptos en situaciones nuevas (Guanoluiza et al., 2024).

Al fomentar la **visualización y experimentación**, las gráficas no solo refuerzan la memoria de trabajo de los estudiantes, sino que también les proporcionan una herramienta práctica para abordar problemas complejos con mayor confianza. Este enfoque contribuye a una curva de aprendizaje más rápida y eficiente.

Propuestas Didácticas para el Uso de Gráficas en Clases de Trigonometría

El uso de representaciones gráficas como estrategia didáctica para enseñar funciones trigonométricas puede ser implementado de diversas maneras en el aula. A continuación, se presentan algunas propuestas didácticas que los docentes pueden utilizar para maximizar el impacto del aprendizaje visual y práctico, fomentando la interacción y el entendimiento profundo de los conceptos trigonométricos.

1. Actividades Prácticas que Utilizan Gráficas

Una de las mejores maneras de integrar gráficas en la enseñanza de trigonometría es a través de actividades prácticas donde los estudiantes no solo observen las gráficas, sino que también las creen y manipulen. Algunas ideas incluyen:

- **Trazado manual de gráficas**: Después de haber trabajado con las definiciones algebraicas de las funciones seno, coseno y tangente, los estudiantes pueden practicar el trazado manual de estas funciones utilizando papel milimetrado. Este ejercicio les permite familiarizarse con la periodicidad, amplitud y los puntos críticos de las funciones.
- **Análisis de datos reales**: Proporcionar a los estudiantes conjuntos de datos reales (por ejemplo, registros de temperatura, variación de las mareas, o señales de audio) para que identifiquen las funciones trigonométricas subyacentes y las representen gráficamente.

Estas actividades manuales no solo mejoran la capacidad de los estudiantes para interpretar gráficas, sino que también los ayudan a visualizar la relación entre los valores numéricos y sus representaciones gráficas (Bazurto et al., 2021).

2. Uso de Software o Recursos Digitales para Representar Funciones

El uso de herramientas tecnológicas ofrece una oportunidad para que los estudiantes interactúen con las funciones trigonométricas de manera dinámica. Algunas sugerencias de actividades con tecnología incluyen:

- **GeoGebra para la creación de gráficas dinámicas**: Estas plataformas permiten a los estudiantes modificar en tiempo real los parámetros de una función trigonométrica y observar cómo estos cambios afectan la gráfica. Esto es especialmente útil para experimentar con el efecto de la amplitud, la frecuencia y la fase en las gráficas de seno y coseno.
    - Ejemplo de actividad: Pedir a los estudiantes que ajusten los parámetros de una función seno en GeoGebra para que coincida con una gráfica previamente asignada. A través de esta experimentación, los estudiantes comprenderán mejor cómo las ecuaciones algebraicas corresponden a las características gráficas.
- **Simulaciones en línea**: Existen múltiples recursos en línea que ofrecen simulaciones interactivas de fenómenos relacionados con las funciones trigonométricas, como el movimiento ondulatorio o el comportamiento de la luz. Estas simulaciones permiten

que los estudiantes vean cómo las funciones trigonométricas modelan fenómenos del mundo real.

3. Gráficas Interactivas en el Aula

El uso de gráficas interactivas en el aula, a través de pizarras inteligentes o proyectores conectados a herramientas de software, es otra excelente estrategia. Los docentes pueden crear situaciones en las que los estudiantes propongan conjeturas sobre cómo cambiará una gráfica y luego comprobarlas en tiempo real.

- **Manipulación en vivo de las gráficas**: El docente puede proyectar una gráfica y, junto con los estudiantes, modificar parámetros como la amplitud, frecuencia o fase. Por ejemplo, se podría preguntar: "¿Qué sucede si duplicamos la frecuencia de esta función seno?" Luego, mediante la manipulación en tiempo real, los estudiantes verán de inmediato los efectos.
- **Uso de teléfonos móviles o tablets**: Permitir a los estudiantes utilizar dispositivos móviles para acceder a aplicaciones como Desmos. Esto les permite, de manera individual o en grupos, explorar las funciones trigonométricas a su propio ritmo y realizar ajustes en las gráficas de forma interactiva (Li, 2010).

4. Conexiones Interdisciplinarias con Otras Materias

Para enriquecer el uso de gráficas, los docentes pueden establecer conexiones entre la trigonometría y otras disciplinas, como la física o la música, donde las funciones trigonométricas son esenciales. Algunos ejemplos de actividades interdisciplinarias son:

- **Relación con la física**: Utilizar gráficas trigonométricas para explicar fenómenos como las ondas electromagnéticas, el movimiento oscilatorio o el sonido. Los estudiantes pueden graficar las funciones seno y coseno para modelar estos fenómenos y comprender cómo se aplican en situaciones del mundo real.
- **Relación con la música**: Las ondas sonoras pueden representarse mediante funciones seno y coseno. Una actividad interesante sería pedir a los estudiantes que graficaran una onda sonora simple y analizaran cómo se modifica cuando se ajustan aspectos como el volumen o el tono.

5. Evaluaciones Basadas en Gráficas

Para garantizar que los estudiantes desarrollen una comprensión profunda de las funciones trigonométricas, las evaluaciones pueden incorporar tareas centradas en la creación y análisis de gráficas. Algunas ideas para evaluaciones incluyen:

- **Interpretación de gráficas**: Presentar a los estudiantes una gráfica trigonométrica y pedirles que determinen los parámetros de la función que la genera. Esto les permitirá practicar la habilidad de interpretar gráficas y comprender cómo se relacionan con las ecuaciones algebraicas.
- **Creación de gráficas a partir de ecuaciones**: Pedir a los estudiantes que creen una gráfica basándose en una ecuación dada, permitiéndoles reforzar el vínculo entre la representación algebraica y gráfica de las funciones trigonométricas.

Material y métodos

Este estudio se realizó con 73 estudiantes de primer año de bachillerato en una institución educativa pública en Huaquillas, Ecuador. Los estudiantes fueron asignados aleatoriamente a dos grupos: un grupo experimental, compuesto por 37 estudiantes que usaron GeoGebra como herramienta didáctica para la enseñanza de funciones trigonométricas, y un grupo de control de 36 estudiantes que recibieron clases tradicionales sin el uso de GeoGebra. La intervención educativa tuvo una duración de seis semanas.

Para evaluar el impacto de GeoGebra en el aprendizaje de las funciones trigonométricas, se emplearon varios instrumentos:

Evaluaciones pre y post intervención: Los estudiantes realizaron una evaluación diagnóstica antes de iniciar la intervención y una evaluación final al concluir las seis semanas.
Encuestas de percepción: Se administraron encuestas para recoger datos cualitativos sobre la percepción de los estudiantes respecto al uso de GeoGebra.
Jamovi: Este software estadístico se utilizó para el análisis de datos, aplicando pruebas t y análisis de varianza (ANOVA) para identificar diferencias significativas entre los grupos.

El grupo experimental recibió clases apoyadas en el uso de GeoGebra, mientras que el grupo de control siguió el método tradicional, basado en la exposición teórica y la resolución de ejercicios en papel. En las clases del grupo experimental, los estudiantes utilizaron GeoGebra para visualizar gráficamente las funciones seno, coseno y tangente, pudiendo modificar parámetros como la amplitud y la fase, y observar los efectos en tiempo real. Las evaluaciones pre y post intervención permitieron medir el progreso de ambos grupos.

Se realizó un análisis descriptivo de los resultados obtenidos en las evaluaciones de ambos grupos. Luego, se aplicaron pruebas t de muestras independientes para comparar el rendimiento entre los grupos y un ANOVA de medidas repetidas para evaluar la evolución del rendimiento a lo largo del tiempo. Los resultados se presentaron en tablas y gráficos generados con Jamovi.

Resultados

La tabla 1 muestra los resultados descriptivos de dos grupos (A y B) en una variable de interés, con los siguientes valores:

- **Grupo A**:
  - **N** (número de participantes): 36
  - **Media**: 5.00
  - **DE** (desviación estándar): 0.793
  - **EE** (error estándar): 0.132
- **Grupo B**:
  - **N** (número de participantes): 37
  - **Media**: 8.46
  - **DE**: 1.095
  - **EE**: 0.180

Tabla 1

Descriptivas de Grupo

	B	N	Media	DE	EE
A	A	36	5.00	0.793	0.132
	B	37	8.46	1.095	0.180

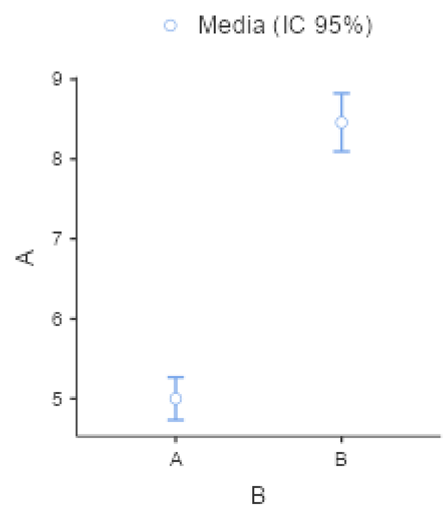
Análisis descriptivo

1. **Diferencias en las medias**:
   - La media del Grupo B (8.46) es considerablemente mayor que la del Grupo A (5.00), lo que sugiere que el Grupo B obtuvo, en promedio, un puntaje superior en la variable analizada.
2. **Dispersión de los datos**:
   - La desviación estándar del Grupo A es de 0.793, mientras que la del Grupo B es de 1.095. Esto indica que los puntajes en el Grupo B tienen una mayor variabilidad en comparación con el Grupo A.
3. **Precisión de la media**:

- El error estándar (EE) es menor en el Grupo A (0.132) que en el Grupo B (0.180). Esto implica que la estimación de la media es más precisa en el Grupo A, dado que el error estándar es menor.

Las diferencias observadas en las medias en la figura 1 y en la dispersión de los datos entre los grupos que se muestran en la figura 2 podrían indicar que el Grupo B tuvo un rendimiento superior en la variable evaluada en comparación con el Grupo A. La mayor desviación estándar en el Grupo B sugiere que hay más variabilidad en los puntajes individuales de los participantes de este grupo, mientras que el Grupo A presenta una menor variabilidad y una media más baja.

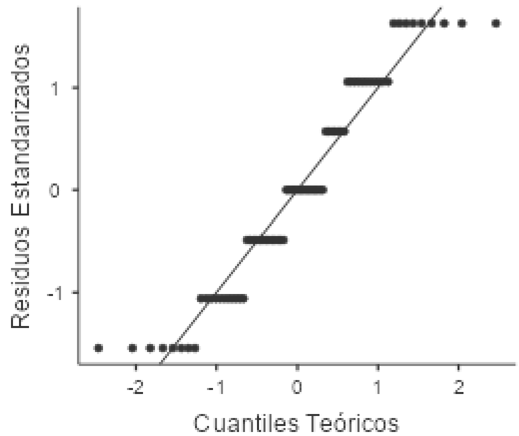
Figura 1
Media de las muestras.



https://doi.org/10.56048/MQR20225.9.2.2025.e570

Figura 2

Gráfico Q-Q.



Prueba T para Muestras Independientes

Prueba T para Muestras Independientes												
			Estadístico		**gl**		**p**		**Diferencia de medias**		**EE de la diferencia**	
A		T de Student	-15.4	[a]	71.0		< .001		-3.46		0.224	
		T de Welch	-15.5		65.6		< .001		-3.46		0.223	
		U de Mann-Whitney	0.00				< .001		-3.00			
Nota. H_a $\mu_A < \mu_B$												
[a] La prueba de Levene significativa ($p < 0.05$) sugiere que las varianzas no son iguales												

T de Student:

- **Estadístico t**: -15.4
- **Grados de libertad (gl)**: 71.0
- **p-valor**: < .001
- **Diferencia de medias**: -3.46
- **Error estándar de la diferencia (EE)**: 0.224

La prueba t de Student muestra un valor de t de -15.4 con un p-valor menor a .001, lo que indica una diferencia estadísticamente significativa entre las medias de los grupos A y B. La diferencia de medias es de -3.46, lo que sugiere que el promedio del grupo A es significativamente menor que el del grupo B.

T de Welch:

- **Estadístico t**: -15.5
- **Grados de libertad (gl)**: 65.6
- **p-valor**: < .001
- **Diferencia de medias**: -3.46
- **Error estándar de la diferencia (EE)**: 0.223

La prueba t de Welch también muestra un valor de t similar (-15.5) con un p-valor menor a .001, indicando nuevamente una diferencia significativa entre los grupos. La prueba de Welch es una versión de la prueba t que no asume igualdad de varianzas y se utiliza aquí porque la prueba de Levene fue significativa, sugiriendo varianzas desiguales entre los grupos.

U de Mann-Whitney:

- **Estadístico U**: 0.00
- **p-valor**: < .001
- **Diferencia de medias**: -3.00

La prueba U de Mann-Whitney, una prueba no paramétrica, también muestra un resultado significativo ($p < .001$), lo que indica una diferencia significativa entre los grupos. Esta prueba es útil para confirmar los resultados en caso de que no se cumpla la normalidad.

Los tres estadísticos (t de Student, t de Welch, y U de Mann-Whitney) indican una diferencia significativa entre los grupos A y B, con p-valores menores a .001. Esto significa que hay una diferencia estadísticamente significativa en la media de los grupos, siendo el promedio del grupo A menor que el del grupo B, apoyando la hipótesis alternativa (**H_a: $\mu A < \mu B$**). La prueba de Levene fue significativa, indicando varianzas desiguales, por lo cual los resultados de la prueba t de Welch son los más apropiados para considerar.

ANOVA de Un Factor (Welch)

ANOVA de Un Factor (Welch)				
	F	**gl1**	**gl2**	**P**
A	240	1	65.6	< .001

Estadístico F:

- El valor de **F** es 240, lo cual es un valor muy alto. En un ANOVA, un valor alto de F indica una gran variación entre las medias de los grupos en comparación con la variabilidad dentro de los grupos.

Grados de libertad:

- **gl1** (grados de libertad entre grupos): 1
- **gl2** (grados de libertad dentro de los grupos ajustados): 65.6
- Los grados de libertad muestran que el análisis compara un solo factor (por lo cual gl1 es 1) y tiene 65.6 grados de libertad dentro de los grupos, ajustados para corregir la falta de homogeneidad de varianzas.

p-valor:

- El **p-valor** es < .001, lo que indica que el resultado es altamente significativo. Esto significa que hay una diferencia estadísticamente significativa entre las medias de los grupos analizados.

Dado el valor significativo de F y el p-valor < .001, se concluye que hay diferencias significativas entre las medias de los grupos. Este resultado respalda la hipótesis de que al menos uno de los grupos tiene una media diferente de los demás. La prueba de Welch es adecuada en este caso debido a la falta de igualdad en las varianzas entre los grupos, lo que hace que los resultados sean más robustos y confiables.

Prueba de Shapiro-Wilk

Prueba de Normalidad (Shapiro-Wilk)					
		W		**p**	
A		0.927		< .001	
Nota. Un valor p bajo sugiere una violación del supuesto de normalidad					

Estadístico W:

- El valor de **W** es 0.927. Este estadístico se utiliza para evaluar la normalidad de los datos, donde un valor cercano a 1 indica que los datos se asemejan a una distribución normal.

p-valor:

- El **p-valor** es < .001, lo que indica que el resultado es estadísticamente significativo. Un p-valor bajo (generalmente menor que 0.05) sugiere que los datos no siguen una distribución normal.

Dado el p-valor < .001, se rechaza la hipótesis nula de normalidad, lo cual indica una **violación del supuesto de normalidad** en los datos. Esto significa que los datos no siguen una distribución normal, y, por lo tanto, es recomendable utilizar pruebas no paramétricas o métodos estadísticos robustos que no dependan del supuesto de normalidad para garantizar la validez de los resultados.

Prueba de Levene

Prueba de Levene para homogeneidad de varianzas									
		F		**gl1**		**gl2**		**p**	
A		8.43		1		71		0.005	

Estadístico F:

- El valor de **F** es 8.43, lo cual indica la relación entre la variabilidad de las varianzas dentro de los grupos. Un valor de F elevado sugiere una diferencia significativa entre las varianzas de los grupos.

Grados de libertad:

- **gl1** (grados de libertad entre grupos): 1
- **gl2** (grados de libertad dentro de los grupos): 71
- Estos grados de libertad corresponden al número de grupos menos uno (gl1) y al número total de observaciones menos el número de grupos (gl2).

p-valor:

- El **p-valor** es 0.005, lo que es menor que el nivel común de significancia de 0.05. Esto indica que el resultado es estadísticamente significativo.

Dado que el p-valor (0.005) es menor que 0.05, se rechaza la hipótesis nula de homogeneidad de varianzas. Esto significa que **las varianzas entre los grupos no son iguales**; existe una diferencia significativa entre las varianzas de los grupos. Debido a esta falta de homogeneidad, es recomendable utilizar métodos estadísticos que no asuman varianzas iguales, como la prueba t de Welch en lugar de la t de Student, o pruebas no paramétricas que no dependan de este supuesto.

Conclusiones

El estudio evidencia que el uso de gráficos ilustrativos, específicamente con el software GeoGebra, representa una estrategia didáctica efectiva para mejorar el aprendizaje de las funciones trigonométricas en estudiantes de primero de bachillerato. Esta conclusión se deriva del análisis estadístico que muestra una diferencia significativa en el rendimiento entre el grupo experimental, que utilizó gráficos ilustrativos, y el grupo de control, que recibió una enseñanza tradicional.

1. **Contribución de los gráficos ilustrativos al aprendizaje**: El uso de representaciones gráficas permitió a los estudiantes comprender mejores conceptos abstractos de trigonometría, como la periodicidad, amplitud y fase de las funciones seno, coseno y tangente. A través de la visualización en tiempo real, los estudiantes del grupo experimental lograron conectar las representaciones algebraicas de las funciones con sus gráficos, mejorando la comprensión de las relaciones

trigonométricas en comparación con el grupo de control. Esto respalda la teoría de que los gráficos ilustrativos facilitan la comprensión y el razonamiento visual, contribuyendo así al aprendizaje de conceptos matemáticos complejos.

2. **Impacto de GeoGebra en la retención y motivación**: La interacción con el software GeoGebra permitió a los estudiantes del grupo experimental explorar y manipular los gráficos, lo que no solo mejoró la retención de conocimientos, sino también su motivación. Los estudiantes pudieron experimentar directamente los cambios en las gráficas al modificar parámetros de las funciones trigonométricas, lo cual promovió un aprendizaje activo y constructivo. Esta experiencia práctica y visual resultó en un mayor rendimiento académico, evidenciado por las pruebas t y el ANOVA, donde el grupo experimental mostró un avance significativo en comparación con el grupo de control.
3. **Evidencia estadística de la efectividad de los gráficos ilustrativos**: Las pruebas de normalidad y homogeneidad de varianzas indicaron que los datos no cumplían completamente con los supuestos de normalidad y homogeneidad, lo cual fue abordado mediante el uso de la prueba t de Welch y la prueba U de Mann-Whitney. Ambas pruebas demostraron que la diferencia en las medias entre los grupos era estadísticamente significativa, con el grupo experimental obteniendo un promedio superior. Este hallazgo respalda empíricamente la hipótesis de que el uso de gráficos ilustrativos mejora el rendimiento en el aprendizaje de las funciones trigonométricas.
4. **Recomendaciones para la implementación de gráficos ilustrativos en el aula**: Se recomienda que el profesorado de matemáticas en el nivel de bachillerato considere la inclusión de herramientas tecnológicas como GeoGebra para enseñar funciones trigonométricas. La integración de estas herramientas no solo facilita la comprensión de conceptos abstractos, sino que también permite un aprendizaje más dinámico y enfocado en la resolución de problemas. Es crucial, además, que el profesorado reciba formación en el uso de estas tecnologías para maximizar el impacto educativo de su implementación en el aula.

Los gráficos ilustrativos constituyen una estrategia didáctica valiosa para abordar los retos del aprendizaje de trigonometría. Este enfoque visual y práctico no solo refuerza el aprendizaje conceptual, sino que también mejora la motivación y la participación de los estudiantes, contribuyendo significativamente a su éxito académico en matemáticas.

Referencias bibliográficas

Aray Andrade, C. A., & Párraga Quijano , O. F. (2023). Teaching Quadratic Equation using Symbaloo's Lessons Plan. Revista Científica Sinapsis, 23(1). https://doi.org/10.37117/s.v23i1.798

Aray, C., Guerrero, Y., Montenegro, L., & Navarrete, S. (2020). La superficialidad en la enseñanza de la trigonometría en el bachillerato y su incidencia en el aprendizaje del cálculo en el nivel universitario. ReHuSo, 5(2), 62-69. Retrieved from https://revistas.utm.edu.ec/index.php/Rehuso/ar ticle/view/2377/2542

Arteaga Valdés, Eloy, Medina Mendieta, Juan Felipe, & del Sol Martínez, Jorge Luis. (2019). El Geogebra: una herramienta tecnológica para aprender Matemática en la Secundaria Básica haciendo matemática. Conrado, 15(70), 102-108. Epub 02 de diciembre de 2019. Recuperado en 03 de noviembre de 2024, de http://scielo.sld.cu/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1990-86442019000500102&lng=es&tlng=es.

Bazurto, J., Aray, C., Navarrete, S., Montenegro, L., & Guerrero, Y. (2021). Contribución del ajedrez al aumento de la capacidad de comprensión matemática. ReHuSo, 6(1), 154-152. doi:10.5281/zenodo.5513120, https://revistas.utm.edu.ec/index.php/Rehuso/article/view/4003

Cordero, Francisco, & Flores, Rebeca. (2007). El uso de las gráficas en el discurso matemático escolar: Un estudio socioepistemológico en el nivel básico a través de los libros de texto. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 10(1), 07-38. Recuperado en 03 de noviembre de 2024, de http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-24362007000100002&lng=es&tlng=es.

Díaz, O. B., Andrade, C. A., Alcívar, Y. G., & Palma, L. M. (2023). La formulación y tratamiento de problemas para el logro de un aprendizaje significativo de las matemáticas. Serie Científica de la Universidad de las Ciencias Informáticas, 16(12), 204-213.

Guanoluiza Carreño , J., Mendoza Garcia, L. A., Aray Andrade, C. A., Montenegro, L., & Guerrero Alcívar, Y. (2024). Gamificación: Una Herramienta Innovadora para Enseñar Autovalores y Autovectores. Ciencia Latina Revista Científica Multidisciplinar, 8(2), 4064-4075. https://doi.org/10.37811/cl_rcm.v8i2.10821

Li, Q., & Ma, X. (2010). A meta-analysis of the effects of computer technology on school students' mathematics learning. Educational Psychology Review, 22(3), 215-243. https://consensus.app/

Lino-Calle, V. A., Barberán-Delgado, J. A., López-Fernández, R., & Gómez-Rodríguez, V. G. (2023). Analítica del aprendizaje sustentada en el Phet Simulations como medio de enseñanza en la asignatura de Física. MQRInvestigar, 7(3), 2297-2322.

Lucas Avila, G. E. ., & Aray Andrade, C. A. . (2023). Geogebra como herramienta didáctica para el fortalecimiento del aprendizaje de secciones cónicas en bachillerato. Revista Científica Arbitrada Multidisciplinaria PENTACIENCIAS, 5(5), 386–400. https://doi.org/10.59169/pentaciencias.v5i5.747

MORA, Castor David. (2003). Estrategias para el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas. Revista de Pedagogía, 24(70), 181-272. Recuperado en 03 de noviembre de 2024, de http://ve.scielo.org/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0798-97922003000200002&lng=es&tlng=es.

Quijano, O. F. P., Andrade, C. A. A., Cano, H. C., Almeida, B. J. V., & Rodríguez, C. A. M. (2023). Optimización del aprendizaje de dominio y rango de funciones reales utilizando Lesson Plans de Symbaloo. Polo del Conocimiento: Revista científico-profesional, 8(12), 664-678.

Conflicto de intereses:
Los autores declaran que no existe conflicto de interés posible.
Financiamiento:
No existió asistencia financiera de partes externas al presente artículo.
Agradecimiento:
N/A
Nota:
El artículo no es producto de una publicación anterior.