

Didactic proposal with GeoGebra to articulate the algebraic and geometric registers in the teaching of triple integrals
Propuesta didáctica con GeoGebra para articular los registros algebraico y geométrico en la enseñanza de las integrales triples

Autores:

Tineo, Ambrosio José
UNIVERSIDAD TÉCNICA DE MANABÍ
Facultad de Ciencias Básicas
Departamento Matemáticas y Estadística
Ecuador



ambrosio.tineo@utm.edu.ec



<https://orcid.org/0000-0002-2060-8860>

Aray, Carlos Alberto
UNIVERSIDAD TÉCNICA DE MANABÍ
Facultad de Ciencias Básicas
Departamento Matemáticas y Estadística
Ecuador



carlos.aray@utm.edu.ec



<https://orcid.org/0000-0002-0210-3877>

Fechas de recepción: 09-ENE-2025 aceptación: 09-FEB-2025 publicación: 15-MAR-2025



<https://orcid.org/0000-0002-8695-5005>

<http://mqrinvestigar.com/>



Resumen

El aprendizaje del cálculo es fundamental para los estudiantes de ingeniería, ya que proporciona la base para asignaturas posteriores en su formación académica y profesional. En particular, el análisis matemático multivariado es clave para modelar fenómenos en diversas disciplinas. Sin embargo, la enseñanza tradicional de las matemáticas frecuentemente prioriza la presentación formal de definiciones y algoritmos, dejando de lado su interpretación geométrica, lo que dificulta la comprensión profunda de conceptos como la integral doble. En este contexto, el uso de herramientas tecnológicas, como GeoGebra, ha demostrado ser una estrategia eficaz para mejorar el rendimiento y el interés de los estudiantes en matemáticas. La presente investigación se centra en analizar la conversión de registros de representación semiótica en la enseñanza de la integral doble, con el objetivo de facilitar su comprensión geométrica y algebraica. Para ello, se adopta el marco teórico de la Teoría de las Representaciones Semióticas de Duval, la cual enfatiza la importancia de la traducción entre distintos registros matemáticos (gráfico, algebraico, etc.). El estudio se desarrolla en la Universidad Técnica de Manabí e implementa una propuesta didáctica basada en GeoGebra, buscando evaluar su impacto en la comprensión del concepto de integral doble. Se espera que la manipulación dinámica de representaciones matemáticas favorezca una mejor apropiación del conocimiento en comparación con los métodos tradicionales de enseñanza.

Palabras clave: Integral doble y triples; Representaciones semióticas; GeoGebra; Enseñanza de matemáticas; Modelización matemática

(



Abstract

Learning calculus is fundamental for engineering students, as it provides the basis for later subjects in their academic and professional training. In particular, multivariate mathematical analysis is key to modeling phenomena in various disciplines. However, traditional mathematics teaching often prioritizes the formal presentation of definitions and algorithms, leaving aside their geometric interpretation, which makes it difficult to deeply understand concepts such as the double integral. In this context, the use of technological tools, such as GeoGebra, has proven to be an effective strategy to improve students' performance and interest in mathematics. This research focuses on analyzing the conversion of semiotic representation records in the teaching of the double integral, with the aim of facilitating its geometric and algebraic understanding. To do so, the theoretical framework of Duval's Theory of Semiotic Representations is adopted, which emphasizes the importance of the translation between different mathematical records (graphic, algebraic, etc.). The study is carried out at the Technical University of Manabí and implements a didactic proposal based on GeoGebra, seeking to evaluate its impact on the understanding of the concept of double integral. It is expected that the dynamic manipulation of mathematical representations will favor a better appropriation of knowledge compared to traditional teaching methods.

Keywords: Double and triple integrals; Semiotic representations; GeoGebra; Mathematics teaching; Mathematical modeling



Introducción

Los estudiantes de ingeniería que cursan asignaturas de matemáticas en los primeros años de su formación adquieren conocimientos de cálculo que sirven de base para otras materias en su plan de estudios. Por ello, para que tengan éxito en su trayectoria académica y futura práctica profesional, resulta imprescindible que comprendan estos conceptos matemáticos y sean capaces de interpretarlos y aplicarlos en asignaturas posteriores.

El análisis matemático multivariado es de gran importancia, pues permite modelar fenómenos presentes en ciencias, matemáticas, ingeniería y otras disciplinas. En consecuencia, en los últimos años ha aumentado el interés por la enseñanza y el aprendizaje del cálculo de funciones multivariantes, en particular de las funciones de dos variables [1].

No obstante, con frecuencia, los conceptos matemáticos se presentan a los estudiantes a través de definiciones formales, relegando su interpretación geométrica [2]. Esto plantea varios desafíos para el docente; según Dreyfus y Kouropatov [3], en la literatura destacan dos fenómenos. El primero consiste en el desarrollo de cursos de matemáticas que se centran en algoritmos y fórmulas, dejando de lado la relevancia del significado matemático en la modelización. El segundo hace referencia al desacople entre los distintos registros de representación que describen un mismo objeto matemático en este caso, la integral doble, lo que dificulta su comprensión.

En las últimas décadas, el vertiginoso avance tecnológico ha propiciado la creación y el uso de software educativo en distintos niveles formativos [4]. Así, se ha observado que la incorporación de GeoGebra en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas mejora tanto el rendimiento como el interés de los estudiantes [5].

Este contexto motiva la presente investigación, cuyo objetivo es profundizar en el tratamiento y la conversión de los registros de representación semiótica que los estudiantes de ingeniería civil de la Universidad Técnica Particular de Loja llevan a cabo sobre la “integral doble”. Para ello, se emplea el software GeoGebra, ya que se han identificado dificultades en la comprensión de las diferentes representaciones involucradas en la construcción del significado geométrico de esta integral. Con este fin, se recurre a los aportes de la Teoría de las Representaciones Semióticas de Duval [6] y se diseña una propuesta didáctica encaminada al uso de distintos registros de representación.



2. Fundamentación Teórica

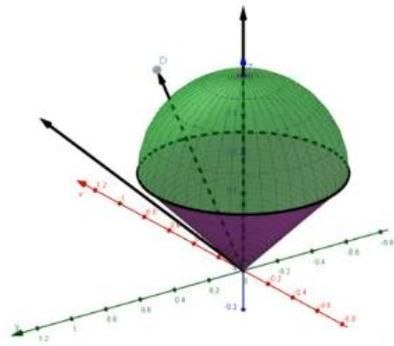
2.1. Registros de Representaciones Semióticas

Esta experiencia didáctica se fundamenta en la Teoría de los Registros de Representaciones Semióticas de Raymond Duval, según la cual la actividad matemática se apoya en diversos registros semióticos (gráfico, algebraico, aritmético, entre otros), que sirven a los estudiantes para interpretar, comunicar y construir significados matemáticos. Sin embargo, la elección de un registro en particular depende del objetivo específico de la actividad. En este estudio, se inicia con el registro gráfico y, posteriormente, se realiza la conversión al registro algebraico para calcular el volumen de un sólido mediante la integral doble. Este proceso implica la coordinación interna de los registros de representación; sin ella, podrían existir dos representaciones distintas que describan objetos matemáticos diferentes, sin relación alguna, incluso si se refieren al mismo objeto en diferentes “contextos de representación” [7].

La actividad de generar representaciones recibe el nombre de *semiosis*, mientras que la apropiación de conceptos matemáticos se denomina *noesis*. La *formación* de una representación consiste en la manifestación cognitiva de una idea, el *tratamiento* se refiere a la modificación de una representación dentro de un mismo registro y la *conversión* implica pasar de un registro semiótico a otro [6]. Para lograr la coordinación de los registros se requiere planificar una secuencia de tareas que estimule la exploración sistemática de las variantes del objeto matemático.

En el estudio de la integral doble, el punto de partida es el registro gráfico, como se ilustra en la Figura 1.

Figura 1. Registro gráfico de la integral triple



Material y métodos

A continuación, se describe la metodología empleada para dar respuesta al objetivo de esta investigación, la cual se estructuró en tres etapas principales. Cada etapa se diseñó con el fin de asegurar, por un lado, la apropiación de los conceptos fundamentales para la comprensión geométrica del objeto de estudio y, por otro, la aplicación de dichos conceptos mediante una secuencia didáctica que favorezca la articulación de los registros gráfico y algebraico.

Etapla 1. Apropiación de aprendizajes previos necesarios para la secuencia didáctica

Durante esta primera fase, se abordaron los conceptos esenciales para la comprensión de un sólido en el espacio tridimensional. Se enfatizó en:

- **Región en 2D:** estudio y caracterización de regiones sobre el plano, con especial atención a la identificación de límites y fronteras de las figuras.
- **Funciones de dos variables en 3D:** análisis de planos y funciones cuadráticas (superficies parabólicas, esféricas, cilíndricas, etc.).
- **Sistemas de coordenadas cilíndricas y esféricas:** introducción al uso y conversión de funciones y regiones entre distintos sistemas de coordenadas.
- **Concepto de integral doble:** presentación de la definición, propiedades y primeras aplicaciones en el cálculo de áreas y volúmenes.
- **Visualización con GeoGebra:** uso de representaciones dinámicas para observar la región de integración y el sólido asociado.

Este proceso se desarrolló a lo largo de 12 semanas, dentro de un semestre de 18 semanas de la asignatura de Análisis Matemático Multivariado. Se organizaron reuniones semanales de 5 horas, destinando 3 de ellas específicamente a actividades de la secuencia didáctica centrada en la interpretación geométrica.

Etapla 2. Diseño e implementación de la secuencia didáctica

Tras asegurar la asimilación de los conocimientos previos, se diseñó una secuencia didáctica basada en una aplicación contextualizada para ingeniería civil, con el fin de articular lo visto en la Etapa 1 y promover la conversión de registros. Los estudiantes partieron de la representación gráfica dinámica de un sólido, diseñada en GeoGebra, para luego traducir



dicha representación al registro algebraico y proceder al cálculo del volumen mediante la integral doble.

- **Grupo experimental:** se presentó el sólido a través de GeoGebra, permitiendo la manipulación y exploración dinámica en 3D. El objetivo principal fue fomentar la comprensión geométrica antes de pasar al registro algebraico.
- **Grupo control:** la misma propuesta se desarrolló empleando únicamente gráficos estáticos (imágenes o capturas de GeoGebra), sin posibilidades de interacción. Se mantuvo la misma consigna de cálculo de volumen, pero sin la manipulación dinámica del objeto.

Para conformar los grupos, se partió de una población total de 200 estudiantes inscritos en la asignatura de Análisis Matemático Multivariado (4 grupos de 50 estudiantes cada uno, asignados por la universidad). Se seleccionaron de manera aleatoria dos de esos grupos y, dentro de cada uno, se trabajó con 35 estudiantes, conformando así un **grupo experimental** (n=35) y un **grupo control** (n=35), lo que da una muestra total de 70 participantes. El tipo de muestreo aplicado se considera probabilístico, según la definición de Hernández et al. [8], pues cada estudiante tuvo la misma probabilidad de ser elegido.

La consigna principal en ambas secuencias didácticas fue la misma:

“Plantear una integral doble a partir del sólido y encontrar su volumen.”

La diferencia fundamental estuvo en el tipo de representación gráfica. Mientras que el grupo experimental dispuso de un sólido dinámico en GeoGebra para su exploración (ver Figura 2), el grupo control únicamente contó con una representación estática del mismo objeto (captura de pantalla). Esta estrategia buscó aislar la variable “visualización dinámica” y observar su efecto sobre la comprensión y el rendimiento académico.

Etapa 3. Evaluación de la secuencia didáctica y análisis de resultados

Para valorar la efectividad de la propuesta, al finalizar la implementación se aplicaron instrumentos de evaluación y recolección de información:

1. **Prueba de conocimiento:** se administró un cuestionario individual para medir la comprensión conceptual y procedimental de la integral doble, tanto en su interpretación geométrica como en su cálculo algebraico.



2. **Observación y rúbricas:** se utilizaron guías de observación y rúbricas de desempeño para registrar la participación activa de los estudiantes, su habilidad de trasladar la representación del registro gráfico al algebraico y su nivel de autonomía en la resolución de ejercicios.
3. **Encuesta de percepción:** se pidió a los estudiantes que valoraran la utilidad de GeoGebra y el diseño de las actividades, expresando qué aspectos les resultaron más o menos favorables para su aprendizaje.

La secuencia didáctica fue valorada positivamente en aspectos como la *comprensión geométrica del objeto matemático*, la *pertinencia de la progresión de tareas* y la *motivación* generada en torno al uso de GeoGebra. En particular, se observó que la manipulación dinámica propició un mayor entendimiento de la región de integración y la relación entre la gráfica en 3D y la expresión algebraica correspondiente.

Con estos resultados se obtuvo evidencia de que la estrategia de articular el registro geométrico-dinámico con el algebraico no solo facilita la comprensión de la integral doble, sino que también promueve la motivación y el involucramiento del estudiantado en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

El estudio se realizó con dos paralelos del segundo semestre de la asignatura Cálculo de Varias Variables en la Universidad Técnica de Manabí, en el cantón Portoviejo. El paralelo A, compuesto por 43 estudiantes, fue asignado como grupo experimental y utilizó GeoGebra en el proceso de aprendizaje de las integrales triples. En contraste, el paralelo B, con 41 estudiantes, actuó como grupo de control, abordando el mismo contenido a través de clases tradicionales. En el grupo experimental, se implementaron actividades didácticas que incluían el uso de GeoGebra, mientras que el grupo de control utilizó métodos convencionales.

La motivación para este estudio surgió de los reportes parciales y quimestrales de los docentes, que reflejaban dificultades continuas en el aprendizaje de geometría, particularmente en el manejo de secciones cónicas. Debido a la falta de infraestructura para que cada estudiante tuviera acceso individual a GeoGebra, las autoridades académicas permitieron el uso de teléfonos móviles durante las sesiones de clase. En el grupo



experimental, GeoGebra fue empleado como herramienta para visualizar y trabajar con estos temas.

Una vez realizadas las sesiones, se aplicó un test a ambos grupos, cuyos resultados fueron tabulados y analizados mediante pruebas estadísticas como ANOVA y t de Student, con el propósito de comparar las medias y evaluar las diferencias entre los métodos de enseñanza. Los resultados de esta investigación permitirán valorar si el uso de GeoGebra genera mejoras significativas en el aprendizaje de las integrales triples en comparación con la enseñanza tradicional. Además, el análisis proporcionará una visión clara sobre el impacto de la tecnología en el proceso educativo, lo cual puede contribuir a la mejora continua de las prácticas docentes en matemáticas. Los resultados obtenidos se analizaron utilizando técnicas estadísticas descriptivas e inferenciales Jamovi (Santos-Trigo, 2023), mediante el uso de este software especializado que permitió evaluar la significancia de las mejoras observadas en el rendimiento de los estudiantes.

Resultados

Después de integrar GeoGebra en el aula y realizar pruebas de evaluación para medir el nivel de dominio del tema en los grupos experimental y de control, surgió la necesidad de determinar si GeoGebra tiene un impacto en el aprendizaje de las matemáticas, especialmente en el estudio de las integrales triples. Para ello, se formularon las siguientes hipótesis:

$H_0: \bar{x}_{experimental} = \bar{x}_{control}$, que establece que no existe diferencia alguna entre las medias del post-test de ambos grupos. Por otro lado, la hipótesis alternativa $H_1: \bar{x}_{experimental} \neq \bar{x}_{control}$, sugiere que sí existen diferencias entre las medias de los dos grupos. Es decir, la hipótesis nula plantea que la utilización de GeoGebra no influye en el aprendizaje de las integrales triples, mientras que la hipótesis alternativa sostiene que GeoGebra sí tiene una influencia significativa en dicho aprendizaje.

Para validar estas hipótesis, se realizará un análisis estadístico de un factor utilizando ANOVA y la prueba T-Student, con el fin de identificar las diferencias entre las medias de ambos grupos y determinar si se acepta o rechaza la hipótesis nula.

Análisis de los Resultados



Tabla 1. Descriptivas de los Grupos

Grupo	N	Media	Mediana	DE	EE
A	43	5.63	5.00	1.29	0.197
B	41	8.15	8.00	1.31	0.205

Análisis Descriptivo

Grupo A:

- Número de participantes (N): 43
- Media: 5.63
- Mediana: 5.00
- Desviación Estándar (DE): 1.29
- Error Estándar (EE): 0.197

Grupo B:

- Número de participantes (N): 41
- Media: 8.15
- Mediana: 8.00
- Desviación Estándar (DE): 1.31
- Error Estándar (EE): 0.205

Interpretación de las Medidas de Tendencia Central

- **Medias y Medianas:** El Grupo A tiene una media de 5.63 y una mediana de 5.00, mientras que el Grupo B presenta una media de 8.15 y una mediana de 8.00. La diferencia significativa en los valores centrales entre ambos grupos es evidente, con el Grupo B mostrando valores considerablemente más altos. La cercanía entre la media y la mediana en ambos grupos indica una distribución relativamente simétrica en cada uno.

Análisis de la Dispersión



- **Desviación Estándar (DE):** Ambos grupos tienen desviaciones estándar similares (1.29 en el Grupo A y 1.31 en el Grupo B), lo que sugiere que la dispersión de los datos alrededor de la media es comparable en ambos grupos.
- **Error Estándar (EE):** Los errores estándar también son casi idénticos (0.197 para el Grupo A y 0.205 para el Grupo B), lo que refuerza la estabilidad y la precisión de las estimaciones de la media en cada grupo.

La diferencia en las medias (81.5 vs. 56.3) sugiere una discrepancia significativa entre los dos grupos. El análisis descriptivo destaca las diferencias claras en las medidas de tendencia central, con el Grupo B mostrando puntajes mucho más altos, como se muestra en la **Figura 1**. La similitud en la dispersión de los datos refuerza la validez de la comparación entre los grupos. El cálculo del tamaño del efecto (d de Cohen ≈ 1.94) indica un impacto altamente significativo, lo que apoya la hipótesis de que existe una diferencia importante entre los grupos, como se observa en la **Figura 2**.

Para confirmar estadísticamente esta diferencia, se recomienda realizar una prueba t de Student para muestras independientes, que determinará si la diferencia en las medias es estadísticamente significativa. Si los resultados de esta prueba arrojan un valor p menor al umbral de significancia (por ejemplo, 0.05), se podrá concluir que se acepta la hipótesis de que hay una diferencia significativa entre los dos grupos.

Los datos descriptivos y el análisis preliminar sugieren diferencias considerables en el rendimiento de los dos grupos, lo que proporciona una base sólida para concluir que la intervención o el factor diferencial tiene un efecto significativo en los resultados obtenidos.

Figura 1

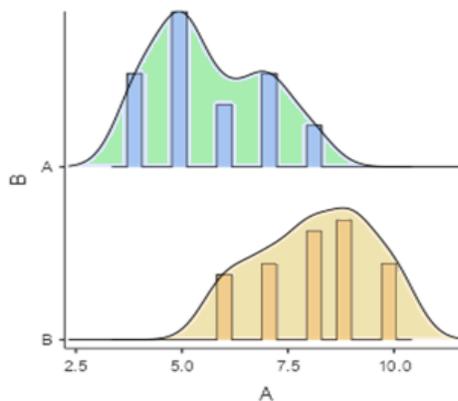


Figura 2

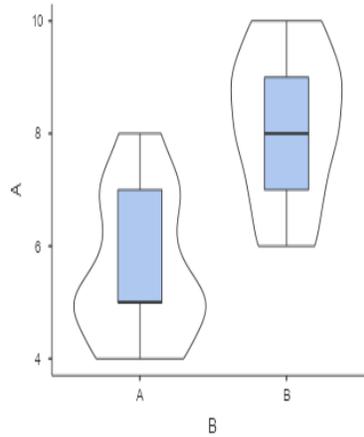


Tabla 2. Análisis de la Prueba t para Muestras Independientes

	Estadístico	gl	p	Diferencia de medias	EE de la diferencia
A	t de Student	-8.86	82.0	< 0.001	-2.52
	t de Welch	-8.85	81.6	< 0.001	-2.52
	U de Mann-Whitney	176		< 0.001	-3.00

Nota: $H_a \mu A \neq \mu B$

El análisis de la prueba t para muestras independientes se realizó para comparar las medias de los dos grupos (A y B) con el objetivo de determinar si la diferencia observada es estadísticamente significativa.

Estadísticos:

- Estadístico t de Student (t): -8.86
- Grados de libertad (gl): 82
- Valor p (p): < 0.001
- Diferencia de medias (Grupo A - Grupo B): -2.52
- Error estándar de la diferencia (EE de la diferencia): 0.284

Estadístico t de Welch:

- Estadístico t de Welch (t): -8.85
- Grados de libertad (gl): 81.6



- Valor p (p): < 0.001
- Diferencia de medias: -2.52
- Error estándar de la diferencia (EE de la diferencia): 0.284

Prueba U de Mann-Whitney:

- Estadístico U: 176
- Valor p: < 0.001
- Diferencia de medias: -3.00

Interpretación de los Resultados

- **Prueba t de Student y Prueba t de Welch:** Los resultados de ambas pruebas t muestran un valor t negativo y muy grande (-8.86 y -8.85), lo que indica una diferencia significativa entre los dos grupos. El valor p es menor a 0.001, lo que significa que la diferencia observada en las medias es altamente significativa. Se rechaza la hipótesis nula (H_0), que planteaba que las medias de los dos grupos son iguales, y se acepta la hipótesis alternativa (H_a), que establece que las medias de los dos grupos son diferentes.

La diferencia de medias es de -2.52, lo que indica que el Grupo B tiene un promedio significativamente más alto que el Grupo A. El error estándar de la diferencia es de 0.284, proporcionando una medida de la precisión de la estimación de la diferencia de medias.

- **Prueba U de Mann-Whitney:** La prueba no paramétrica U de Mann-Whitney también muestra una diferencia significativa, con un valor p menor a 0.001. El estadístico U es 176, y la diferencia en las distribuciones de los dos grupos también es significativa. Este resultado respalda las conclusiones obtenidas en las pruebas t, sugiriendo que la diferencia entre los dos grupos no es atribuible al azar.

Los resultados de las pruebas estadísticas (t de Student, t de Welch y U de Mann-Whitney) son consistentes y muestran una diferencia significativa en las medias de los dos grupos. Dado que el valor p es menor a 0.001 en todos los casos, se puede concluir que la intervención o factor que distingue a los dos grupos tiene un efecto significativo, apoyando la hipótesis alternativa de que las medias de los dos grupos son diferentes.

Tabla 3. Análisis de la Prueba ANOVA de Un Factor (Welch)



F	gl1	gl2	p
78.4	1	81.6	< 0.001

El análisis de la ANOVA de un factor de Welch se realizó para comparar las medias de los dos grupos en un diseño de un solo factor.

Estadísticos:

- Estadístico F: 78.4
- Grados de libertad (gl1): 1
- Grados de libertad (gl2): 81.6
- Valor p (p): < 0.001

Interpretación de los Resultados

Estadístico F: El valor F es 78.4, lo que indica una diferencia muy significativa entre los grupos. Este valor alto sugiere que la variabilidad entre los grupos es mucho mayor que la variabilidad dentro de los grupos, lo que refuerza la evidencia de que las medias de los grupos no son iguales.

Grados de Libertad:

- gl1: 1, ya que se comparan dos grupos.
- gl2: 81.6, que corresponde a los grados de libertad de los errores, calculados con base en el tamaño de la muestra.

Valor p: El valor p es menor a 0.001, lo que indica que la diferencia entre los grupos es estadísticamente significativa. Este valor extremadamente bajo nos lleva a rechazar la hipótesis nula (H_0), que afirmaba que no había diferencias entre las medias de los grupos. Por lo tanto, aceptamos la hipótesis alternativa (H_a), que afirma que las medias son significativamente diferentes.

La prueba ANOVA de un factor (Welch) revela que las medias de los dos grupos son significativamente diferentes, como lo indica el valor de F (78.4) y el valor p (< 0.001). Esto proporciona evidencia sólida de que la intervención o tratamiento tiene un efecto sustancial en las variables medidas, lo que apoya la hipótesis alternativa de que las medias no son iguales.



Discusión

Este estudio se centra en evaluar el impacto de la herramienta tecnológica GeoGebra en el aprendizaje de un concepto abstracto y complejo en matemáticas: las integrales triples. Los principios clave de este trabajo se enfocan en el uso de herramientas digitales en la educación matemática y su potencial para mejorar la comprensión de conceptos avanzados. Se considera que el uso de GeoGebra facilita la visualización dinámica y accesible de las integrales triples, lo que permite una conversión más sencilla de representaciones algebraicas a gráficas, mejorando así el aprendizaje de los estudiantes.

El análisis de los resultados muestra que los estudiantes del grupo experimental (que utilizaron GeoGebra) obtuvieron un rendimiento significativamente superior en comparación con el grupo de control, que fue enseñado mediante métodos tradicionales. Esta diferencia respalda la idea de que las tecnologías interactivas pueden ser herramientas eficaces en la enseñanza de conceptos matemáticos abstractos, como lo han indicado estudios previos en el ámbito de la educación matemática (Andrade et al., 2020; Arteaga et al., 2019).

A pesar de los resultados claros del análisis estadístico, que muestran una diferencia significativa entre ambos grupos, es relevante señalar que la intervención no consideró todas las variables que podrían haber influido en el rendimiento de los estudiantes. Factores como el nivel de conocimiento previo de los estudiantes, sus actitudes hacia las matemáticas o su experiencia previa con herramientas tecnológicas podrían haber influido en los resultados. Aunque las diferencias en el rendimiento son significativas, podrían existir otras variables no contempladas que afectaron los resultados.

Además, no se llevó a cabo un análisis específico sobre el tiempo de uso de GeoGebra en cada grupo, lo que representa una limitación importante. El tiempo de interacción con la herramienta tecnológica podría ser crucial para determinar su impacto en el aprendizaje.

Este estudio coincide con investigaciones previas que han demostrado los beneficios de integrar herramientas tecnológicas en la enseñanza de matemáticas. La teoría de los registros de representaciones semióticas de Duval (2006) subraya la importancia de permitir que los estudiantes transiten entre diferentes formas de representación (algebraica, gráfica, numérica), lo que refuerza la eficacia de herramientas como GeoGebra en la comprensión de



conceptos matemáticos complejos. Investigaciones anteriores también sugieren que las tecnologías interactivas, como GeoGebra, pueden proporcionar una mejor comprensión de las integrales triples al permitir a los estudiantes visualizar y experimentar con estos conceptos en un entorno dinámico (Arteaga et al., 2019).

Asimismo, el estudio respalda los hallazgos de otros trabajos que han evaluado el uso de GeoGebra en la educación matemática, los cuales también reportan mejoras significativas en el rendimiento académico de los estudiantes al utilizar herramientas tecnológicas interactivas (Puspita et al., 2023).

Desde un enfoque teórico, los resultados de este estudio refuerzan la importancia de integrar herramientas tecnológicas en la enseñanza de las matemáticas, especialmente para la comprensión de conceptos abstractos como las integrales triples. Al permitir que los estudiantes interactúen con representaciones visuales y algebraicas de las funciones, se facilita su comprensión de cómo se relacionan las diferentes representaciones y cómo afectan el comportamiento de las funciones en varios puntos, lo que también está alineado con la teoría de Duval sobre los registros de representación semiótica.

Desde una perspectiva práctica, este estudio sugiere que los docentes de matemáticas, especialmente en cursos de Cálculo en Varias Variables, podrían beneficiarse considerablemente al incorporar herramientas como GeoGebra en su enseñanza. GeoGebra permite a los estudiantes explorar conceptos complejos de manera visual y dinámica, lo que podría hacer que el aprendizaje sea más accesible y atractivo. Además, el estudio abre la posibilidad de implementar tecnologías interactivas en otras áreas de las matemáticas, como álgebra, geometría y cálculo integral, con el fin de mejorar la comprensión de los estudiantes. A partir de los resultados obtenidos, se puede concluir que el uso de GeoGebra tiene un efecto positivo y significativo en el aprendizaje de las integrales triples. Los estudiantes que utilizaron esta herramienta mostraron un rendimiento significativamente mejor en comparación con aquellos que fueron enseñados mediante métodos tradicionales. Los análisis estadísticos (prueba t de Student, ANOVA de un factor de Welch) confirmaron que las diferencias en las medias entre ambos grupos son estadísticamente significativas, con un tamaño de efecto grande (d de Cohen ≈ 1.94), lo que subraya la importancia de las herramientas tecnológicas en la educación matemática.

Sin embargo, es importante señalar que, aunque los resultados son concluyentes en cuanto a la efectividad de GeoGebra, es necesario seguir investigando para controlar variables adicionales que puedan haber influido en los resultados, como el tiempo de interacción con la herramienta o el nivel de conocimiento previo de los estudiantes. Además, sería valioso explorar otros contextos educativos y grupos de estudiantes para validar estos hallazgos en diferentes entornos.

Pruebas que Respaldan las Conclusiones.

Las pruebas estadísticas realizadas, como el análisis ANOVA de un factor ($F = 78.4$, $p < 0.001$), la prueba t de Student ($t = -8.86$, $p < 0.001$) y el análisis U de Mann-Whitney ($U = 176$, $p < 0.001$), respaldan las conclusiones de que la diferencia observada en las medias de los dos grupos es altamente significativa. Además, el cálculo del tamaño del efecto (d de Cohen ≈ 1.94) demuestra un impacto sustancial de la intervención tecnológica en el rendimiento de los estudiantes, validando la hipótesis alternativa de que el uso de GeoGebra influye positivamente en el aprendizaje.

En resumen, este estudio refuerza el valor de las herramientas interactivas como GeoGebra en el aula y su potencial para mejorar la comprensión de conceptos matemáticos avanzados.

Conclusiones

El estudio presentado ofrece un análisis detallado sobre la influencia del uso de GeoGebra en el aprendizaje de un concepto avanzado de matemáticas, las integrales triples, en estudiantes de Ingeniería Civil. Los resultados obtenidos respaldan la hipótesis de que la integración de tecnologías educativas interactivas, como GeoGebra, tiene un impacto significativo en la mejora del rendimiento académico de los estudiantes, en comparación con los métodos tradicionales de enseñanza. Este hallazgo está alineado con investigaciones previas que evidencian la efectividad de las herramientas tecnológicas en la enseñanza de conceptos matemáticos complejos, mejorando la visualización y la comprensión de los estudiantes.

El enfoque central de este estudio se basa en el uso de tecnologías interactivas en la educación matemática, las cuales permiten a los estudiantes realizar transiciones fluidas entre diferentes

formas de representación de conceptos abstractos, como las representaciones algebraica y gráfica. La teoría de los registros de representaciones semióticas de Duval (2006) se emplea como marco teórico para argumentar que la capacidad de transitar entre registros algebraicos y gráficos favorece la comprensión de conceptos matemáticos complejos. Este enfoque permite a los estudiantes no solo visualizar, sino también experimentar con conceptos como las integrales triples, un tema fundamental en el cálculo multivariable. El estudio sugiere que herramientas como GeoGebra pueden superar las barreras cognitivas que los estudiantes enfrentan al abordar estas ideas abstractas.

A pesar de que los resultados del análisis estadístico son concluyentes y muestran una diferencia significativa entre los grupos experimental y de control, es importante señalar algunas limitaciones que podrían haber influido en los resultados. En primer lugar, el estudio no controló adecuadamente el nivel de conocimiento previo de los estudiantes, lo que podría haber introducido sesgos en los resultados. Además, la falta de un análisis específico sobre el tiempo de uso de GeoGebra representa una limitación, ya que el tiempo de interacción con la herramienta tecnológica podría haber tenido un impacto considerable en los resultados obtenidos. La investigación se beneficiaría de estudios futuros que consideren estos factores y realicen un análisis más profundo sobre cómo varía el tiempo de uso de herramientas tecnológicas en la efectividad de su aplicación.

Los resultados obtenidos en este estudio son consistentes con investigaciones previas que han examinado el impacto de GeoGebra y otras herramientas tecnológicas en la enseñanza de las matemáticas. Investigaciones anteriores, como las de Arteaga et al. (2019) y Puspita et al. (2023), han informado mejoras significativas en el rendimiento académico de los estudiantes al utilizar tecnologías interactivas para enseñar conceptos matemáticos complejos. De manera similar, este estudio confirma que el uso de GeoGebra mejora la comprensión de conceptos como las integrales triples al facilitar la visualización y la exploración de funciones en un entorno dinámico. Además, se alinea con la teoría de Duval (2006), que sostiene que el aprendizaje profundo ocurre cuando los estudiantes son capaces de realizar conversiones entre diferentes registros de representación.

Desde una perspectiva teórica, este estudio confirma que el uso de GeoGebra facilita una mejor comprensión de conceptos abstractos como las integrales triples, ya que optimiza la



transición entre los registros algebraico y gráfico. Este enfoque no solo mejora la comprensión teórica de los estudiantes, sino que también tiene importantes implicaciones prácticas. La integración de GeoGebra en el aula puede convertirse en una estrategia pedagógica clave para mejorar la comprensión de temas complejos en cálculo multivariable, álgebra y geometría, al proporcionar a los estudiantes herramientas visuales interactivas que les permiten experimentar con los conceptos de manera más tangible.

Referencias bibliográficas

- Alberto, A. A. C., & Francisco2b, P. Q. O. Rendimiento en aritmética de aspirantes en carreras de salud del Instituto de Admisión y Nivelación (IAN) de la Universidad Técnica de Manabí (UTM). XXXII Jornadas Venezolanas de Matemáticas, 34.
- Aray Andrade, A., Guerrero Alcívar, Y., Navarrete Ampuero, S., & Montenegro Palma, L. (2019). La matematización como estrategia para la comprensión de la realidad y la gestión del desarrollo argumentativo. *Revista de Ciencias Humanísticas y Sociales (ReHuSo)*, 4(3), 74-83. b
- Aray Andrade, C. A., & Párraga Quijano, O. F. (2023). Teaching Quadratic Equation using Symbaloo's Lessons Plan. *Revista Científica Sinapsis*, 23(1).
<https://doi.org/10.37117/s.v23i1.798>
- Aray, C., Guerrero, Y., Montenegro, L. y S. Navarrete (2020). La superficialidad en la enseñanza de la trigonometría en el bachillerato y su incidencia en el aprendizaje del cálculo en el nivel universitario. *Rehuso*, 5 (2), 62-69. Recuperado de:
<https://revistas.utm.edu.ec/index.php/Rehuso/article/view/1684>
- Ayanwale, M. A., Ndlovu, M., & Oladele, J. I. (2022). Mathematics Education and the Fourth Industrial Revolution: Are the High School Mathematics Teachers Ready? In *Mathematics Education in Africa* (pp. 77-96). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-031-13927-7_5
- Bazurto Fernández, Jennifer, Aray Andrade, Carlos, Navarrete Ampuero, Segundo, Montenegro Palma, Luis, & Guerrero Alcívar, Yandri. (2021). Contribución del ajedrez al aumento de la capacidad de comprensión matemática. *Revista de*



Ciencias Humanísticas y Sociales (ReHuSo), 6(1), 144-152. Epub 01 de abril de 2021. <https://doi.org/10.5281/zenodo.5513120>.

- Beato Díaz, O., Aray Andrade, C., Guerrero Alcívar, Y., & Montenegro Palma, L. (2023). La formulación y tratamiento de problemas para el logro de un aprendizaje significativo de las matemáticas. Serie Científica De La Universidad De Las Ciencias Informáticas, 16(12), 204-213. Recuperado a partir de <https://publicaciones.uci.cu/index.php/serie/article/view/1508>
- Florio, E. (2022). The Parabola: Section of a Cone or Locus of Points of a Plane? Tips for Teaching of Geometry from Some Writings by Mydorge and Wallis. *Mathematics*, 10(6). <https://doi.org/10.3390/math10060974>
- Guanoluiza Carreño, J., Mendoza Garcia, L. A., Aray Andrade, C. A., Montenegro, L., & Guerrero Alcívar, Y. (2024). Gamificación: Una Herramienta Innovadora para Enseñar Autovalores y Autovectores. *Ciencia Latina Revista Científica Multidisciplinar*, 8(2), 4064-4075. https://doi.org/10.37811/cl_rcm.v8i2.10821
<https://doi.org/10.3390/su14127237>
- Kholid, M. N., Pradana, L. N., Maharani, S., & Swastika, A. (2022). GeoGebra in Project-Based Learning (Geo-PJBL): A dynamic tool for analytical geometry course. *Journal of Technology and Science Education*, 12(1), 112. <https://doi.org/10.3926/jotse.1267>
- Lucas Avila, G. E., & Aray Andrade, C. A. (2023). Geogebra como herramienta didáctica para el fortalecimiento del aprendizaje de secciones cónicas en bachillerato. *Revista Científica Arbitrada Multidisciplinaria PENTACIENCIAS*, 5(5), 386-400. <https://doi.org/10.59169/pentaciencias.v5i5.747>
- Palacios, L. G. S., Mendoza, J. A. R., Mendoza, A. P. G., & Andrade, C. A. A. (2018). La ética del docente: Una perspectiva axiológica del proceso de la educación superior en el Ecuador. *ReHuSo: Revista de Ciencias Humanísticas y Sociales*, 51-64.
- Quijano, O. F. P., Andrade, C. A. A., Cano, H. C., Almeida, B. J. V., & Rodríguez, C. A. M. (2023). Optimización del aprendizaje de dominio y rango de funciones reales utilizando Lesson Plans de Symbaloo. *Polo del Conocimiento: Revista científico-profesional*, 8(12), 664-678.



- Ramírez-Uclés, R., & Ruiz-Hidalgo, J. F. (2022). Reasoning, Representing, and Generalizing in Geometric Proof Problems among 8th Grade Talented Students. *Mathematics*, 10(5). <https://doi.org/10.3390/math10050789>
- Santos-Trigo, M., Barrera-Mora, F., & Camacho-Machín, M. (2021). Teachers' use of technology affordances to contextualize and dynamically enrich and extend mathematical problem-solving strategies. *Mathematics*, 9(8). <https://doi.org/10.3390/math9080793>
- Valencia Castro, F. A., Muñoz Pino, J. N., Viteri Alcívar, Y. A., Solorzano Loor, W. C., & Zamora Moreira, Valenzuela, P. (2020). *Aplicación del Software GeoGebra en el aprendizaje de los vectores en el espacio en estudiantes de ingeniería del I ciclo en una universidad privada, Lima 2020* [Universidad César Vallejo]. <https://hdl.handle.net/20.500.12692/62920>
- Zambrano-Delgado, A. A., Aray-Andrade, C. A., & Guanoluiza-Carreño, J. (2024). Aplicación de la gamificación para las enseñanzas de las matemáticas en estudiantes de décimo año de básica superior. *MQR Investigator*, 8(3), 5323-5336.



Conflicto de intereses:

Los autores declaran que no existe conflicto de interés posible.

Financiamiento:

No existió asistencia financiera de partes externas al presente artículo.

Nota:

El artículo no es producto de una publicación anterior.

