

**GeoGebra as a didactic tool for the understanding of the mathematical
concept of the directional derivative**

**GeoGebra como herramienta didáctica para la comprensión del
concepto matemático de la derivada direccional**

Autores:

Beato-Díaz, Orestes
UNIVERSIDAD TÉCNICA DE MANABÍ
Facultad de Ciencias Básicas
Departamento Matemáticas y Estadística
Ecuador



orestes.beato@utm.edu.ec



<https://orcid.org/0000-0001-5157-1864>

Tineo, Ambrosio José
UNIVERSIDAD TÉCNICA DE MANABÍ
Facultad de Ciencias Básicas
Departamento Matemáticas y Estadística
Ecuador



ambrosio.tineo@utm.edu.ec



<https://orcid.org/0000-0002-2060-8860>

Aray, Carlos Alberto
UNIVERSIDAD TÉCNICA DE MANABÍ
Facultad de Ciencias Básicas
Departamento Matemáticas y Estadística
Ecuador



carlos.aray@utm.edu.ec



<https://orcid.org/0000-0002-0210-3877>

Fechas de recepción: 04-ENE-2025- aceptación: 04-FEB-2025 publicación: 15-MAR-2025



<https://orcid.org/0000-0002-8695-5005>

<http://mqrinvestigar.com/>



Resumen

Este artículo describe una intervención educativa en un curso de Cálculo en Varias Variables. La intervención se centró en el estudio de la derivada direccional y su representación gráfica mediante GeoGebra, con el fin de mejorar el rendimiento académico de los estudiantes. Se abordaron las dificultades que enfrentaban los alumnos de Ingeniería para graficar funciones en varias variables y para comprender la relación entre una curva y su recta tangente en un punto específico, lo que complicaba la interpretación geométrica de la derivada direccional. El marco teórico se fundamentó en la teoría de registros de representaciones semióticas de Duval (2006), que postula que una comprensión profunda de un objeto matemático se logra a través de la conversión entre diferentes registros de representación, en este caso, del registro algebraico al gráfico. Para ello, se diseñó un applet en GeoGebra que permitió a los estudiantes visualizar las curvas direccionales definidas por $F(x, y, z)$ y graficar la recta tangente en un punto determinado. La metodología implementada facilitó la transición entre la representación algebraica y la gráfica, permitiendo una comprensión más profunda de la derivada direccional. Los resultados mostraron una mejora significativa en la capacidad de los estudiantes para relacionar la expresión algebraica de una función en varias variables con su representación gráfica. Se concluye que la integración de herramientas tecnológicas, como GeoGebra, junto con la teoría de registros de representaciones, favorece la asimilación de conceptos abstractos al fortalecer la habilidad de convertir entre diversas formas de representación matemática.

Palabras clave: Derivada Direccional; Visualización Gráfica; Geogebra; Registros Semióticos

Abstract

This article describes an educational intervention in a Multivariable Calculus course. The intervention focused on the study of the directional derivative and its graphical representation using GeoGebra, with the aim of improving students' academic performance. It addressed the difficulties faced Engineering students in graphing functions of several variables and understanding the relationship between a curve and its tangent line at a specific point, which hindered the geometric interpretation of the directional derivative. The theoretical framework was based on Duval's (2006) theory of registers of semiotic representations, which posits that a deep understanding of a mathematical object is achieved through the conversion between different representation registers—in this case, from the algebraic to the graphical. To facilitate this, a GeoGebra applet was designed that allowed students to visualize directional curves defined by $F(x, y, z)$ and to graph the tangent line at a given point. The methodology enabled the transition between the algebraic and graphical representations, fostering a deeper comprehension of the directional derivative. The results showed a significant improvement in the students' ability to connect the algebraic expression of a multivariable function with its graphical representation. In conclusion, the integration of technological tools such as GeoGebra, combined with the theory of representation registers, facilitates the appropriation of abstract concepts like the directional derivative by enhancing the ability to convert between different forms of mathematical representation.

Keywords: Directional Derivative; Graphical Visualizatio; Geogebra; Semiotic Records



Introducción

La enseñanza de las matemáticas ha experimentado transformaciones significativas en las últimas décadas, impulsadas por el avance de las tecnologías educativas. Estas herramientas digitales han permitido repensar la forma en que se presentan y se aprenden conceptos matemáticos, ofreciendo a los estudiantes experiencias interactivas y dinámicas que facilitan la comprensión de contenidos abstractos y complejos (Quijano et al., 2023). Un ejemplo destacado de estas tecnologías es GeoGebra, un software interactivo que integra geometría, álgebra y cálculo, proporcionando un entorno visual y manipulativo para explorar conceptos matemáticos. Este recurso se ha consolidado como un medio eficaz para mejorar la comprensión de temas avanzados, como el cálculo multivariable y las derivadas direccionales, en los cuales los estudiantes suelen encontrar dificultades significativas (Andrade et al., 2020).

La derivada direccional, un concepto fundamental en el estudio del cálculo multivariable, tiene amplias aplicaciones en disciplinas como la ingeniería, donde se utiliza para modelar y analizar fenómenos complejos en varios campos, como la física, la mecánica y la economía. Sin embargo, la interpretación geométrica de este concepto es un reto para muchos estudiantes, particularmente cuando se trata de visualizar funciones en varias variables y comprender cómo se relacionan con la curva y su recta tangente en un punto determinado (Aray et al., 2020).

Este tipo de dificultades no solo afecta la comprensión teórica de los conceptos, sino que también limita el desarrollo de habilidades prácticas esenciales en la formación de futuros profesionales de la ingeniería (Kholid et al., 2020). De esta manera, se hace evidente la necesidad de herramientas que ayuden a los estudiantes a superar estas barreras cognitivas y favorezcan una comprensión más intuitiva de estos conceptos abstractos (Alberto, & Francisco).

En este contexto, el uso de tecnologías interactivas como GeoGebra ofrece una solución innovadora. A través de su capacidad para representar tanto funciones algebraicas como gráficas de manera simultánea, GeoGebra permite a los estudiantes realizar conversiones fluidas entre diferentes registros de representación, un proceso que favorece la comprensión de los objetos matemáticos en su totalidad (Ayanwale et al., 2022). Este enfoque promueve



no solo una mayor claridad en la visualización, sino también la consolidación de la relación entre la expresión algebraica de una función y su interpretación gráfica, lo cual es esencial para la correcta comprensión de conceptos complejos como la derivada direccional (Aray et al., 2023).

El marco teórico que sustenta esta investigación es la teoría de registros de representaciones semióticas de Florio (2022), la cual sostiene que la comprensión matemática depende de la capacidad de los estudiantes para transitar de un registro de representación a otro, ya sea algebraico, gráfico o simbólico. Según esta perspectiva, los estudiantes logran una comprensión más profunda del concepto cuando son capaces de realizar conversiones entre estos registros de manera fluida (Bazurto et al., 2021). En particular, se pone énfasis en la conversión del registro algebraico al gráfico, ya que esta transición permite a los estudiantes visualizar conceptos abstractos de manera más tangible. Siguiendo esta teoría, la intervención educativa diseñada en este estudio emplea un applet de GeoGebra que facilita la visualización de curvas en varias variables y la representación gráfica de la tangente en un punto específico, promoviendo así una comprensión más clara y accesible de la derivada direccional (Aray et al., 2020).

El objetivo principal de esta investigación es evaluar el impacto del uso de GeoGebra en la comprensión de la derivada direccional por parte de los estudiantes de Ingeniería Civil. (Lucas & Aray, 2023). Este estudio se centra en analizar cómo la herramienta ayuda a los estudiantes a establecer una relación más clara entre la representación algebraica y la gráfica de funciones en varias variables, mejorando así su capacidad para abordar problemas complejos en el ámbito de la ingeniería (Beato et al. 2023).

Material y métodos

La investigación se llevó a cabo en la Universidad Técnica de Manabí, específicamente en los cursos de Cálculo en Varias Variables, durante el período académico de marzo a julio de 2024. La muestra estuvo compuesta por estudiantes de Ingeniería que cursaban esta asignatura, seleccionados mediante un muestreo no probabilístico de conveniencia (Palacios, et al. 2018), con un total de 84 participantes. Esta población fue elegida debido a las dificultades previamente observadas en la comprensión de la derivada direccional y su



visualización gráfica, las cuales fueron identificadas a través de evaluaciones previas y retroalimentación proporcionada a los estudiantes.

El enfoque metodológico de la investigación fue de tipo cuantitativo, basado en el paradigma positivista, el cual se centra en la objetividad y la medición precisa de las variables involucradas en el estudio (Zambrano-Delgado, et al. 2024). El diseño de investigación fue cuasiexperimental, utilizando dos grupos: un grupo control y un grupo experimental (Guanoluiza et al., 2024). El grupo experimental participó en la intervención educativa basada en el uso de GeoGebra, mientras que el grupo control continuó con los métodos tradicionales de enseñanza utilizados en el curso.

La variable dependiente de la investigación fue la comprensión de la derivada direccional, la cual fue medida mediante evaluaciones realizadas antes (pre-test) y después (post-test) de la intervención. Estas evaluaciones incluyeron tanto ejercicios algebraicos como gráficos, diseñados para valorar el dominio de los estudiantes sobre los conceptos clave de la derivada direccional. Por otro lado, la variable independiente fue el uso del applet de GeoGebra, una herramienta interactiva desarrollada específicamente para permitir la visualización de funciones en varias variables y la representación gráfica de la recta tangente en un punto específico.

La intervención educativa consistió en la implementación de un applet interactivo de GeoGebra que facilitaba a los estudiantes la visualización de curvas en varias variables definidas por la ecuación $F(x, y) = 0$, así como la representación de la tangente en un punto determinado. La teoría de registros de representaciones semióticas de Ramírez-Uclés (2022) sirvió como el marco teórico subyacente de la intervención, ya que esta teoría postula que la comprensión de los conceptos matemáticos depende de la capacidad de los estudiantes para realizar conversiones entre diferentes registros de representación, específicamente del registro algebraico al gráfico.

El estudio se realizó con dos paralelos del segundo semestre de la asignatura Cálculo de Varias Variables en la Universidad Técnica de Manabí, en el cantón Portoviejo. El paralelo A, compuesto por 43 estudiantes, fue asignado como grupo experimental y utilizó GeoGebra en el proceso de aprendizaje de las derivadas direccionales. En contraste, el paralelo B, con 41 estudiantes, actuó como grupo de control, abordando el mismo contenido a través de

clases tradicionales. En el grupo experimental, se implementaron actividades didácticas que incluían el uso de GeoGebra, mientras que el grupo de control utilizó métodos convencionales.

La motivación para este estudio surgió de los reportes parciales y quimestrales de los docentes, que reflejaban dificultades continuas en el aprendizaje de geometría, particularmente en el manejo de secciones cónicas. Debido a la falta de infraestructura para que cada estudiante tuviera acceso individual a GeoGebra, las autoridades académicas permitieron el uso de teléfonos móviles durante las sesiones de clase. En el grupo experimental, GeoGebra fue empleado como herramienta para visualizar y trabajar con estos temas.

Una vez realizadas las sesiones, se aplicó un test a ambos grupos, cuyos resultados fueron tabulados y analizados mediante pruebas estadísticas como ANOVA y t de Student, con el propósito de comparar las medias y evaluar las diferencias entre los métodos de enseñanza. Los resultados de esta investigación permitirán valorar si el uso de GeoGebra genera mejoras significativas en el aprendizaje de las derivadas direccionales en comparación con la enseñanza tradicional. Además, el análisis proporcionará una visión clara sobre el impacto de la tecnología en el proceso educativo, lo cual puede contribuir a la mejora continua de las prácticas docentes en matemáticas. Los resultados obtenidos se analizaron utilizando técnicas estadísticas descriptivas e inferenciales Jamovi (Santos-Trigo, 2023), mediante el uso de este software especializado que permitió evaluar la significancia de las mejoras observadas en el rendimiento de los estudiantes.

Resultados

Tras integrar GeoGebra en el aula y aplicar pruebas de evaluación para medir el nivel de dominio del tema en el grupo experimental y el grupo de control, surgió la necesidad de determinar si GeoGebra influye en el aprendizaje de las matemáticas, particularmente en el estudio de las derivadas direccionales. Para ello, se plantearon las siguientes hipótesis:

$H_0: \bar{x}_{experimental} = \bar{x}_{control}$, que establece que no existe ninguna diferencia entre las medias del post test de los dos grupos, y la hipótesis alternativa $H_1: \bar{x}_{experimental} \neq \bar{x}_{control}$, que indica que existe diferencias entre sus medias. Es decir, que la hipótesis nula



establece que la utilización de GeoGebra no influye en el aprendizaje de las derivadas direccionales, mientras que la hipótesis alternativa sostiene que GeoGebra si influye significativamente en el aprendizaje.

Para validar las hipótesis se procede a realizar el análisis estadístico de un factor ANOVA y el T-Student, que permitirán establecer las diferencias de las medias entre los dos grupos, y comprobar si se acepta o se rechaza la hipótesis nula.

Análisis de los Resultados

Tabla 1. Descriptivas de Grupo

Descriptivas de Grupo									
	Grupo		N	Media	Mediana	DE	EE		
A	A		43	5.63	5.00	1.29	0.197		
	B		41	8.15	8.00	1.31	0.205		

Análisis Descriptivo

Grupo A:

- Número de participantes (N): 43
- Media: 5.63
- Mediana: 5.00
- Desviación Estándar (DE): 1.29
- Error Estándar (EE): 0.197

Grupo B:

- Número de participantes (N): 41
- Media: 8.15
- Mediana: 8.00



- Desviación Estándar (DE): 1.31
- Error Estándar (EE): 0.205

Interpretación de las Medidas de Tendencia Central

- **Medias y Medianas:**

El Grupo A presenta una media de 5.63 y una mediana de 5.00, mientras que el Grupo B muestra una media de 8.15 y una mediana de 8.00. La diferencia en los valores centrales entre ambos grupos es notable, con el Grupo B exhibiendo valores significativamente más altos. La cercanía entre la media y la mediana en ambos grupos sugiere una distribución relativamente simétrica en cada uno.

Análisis de la Dispersión

- **Desviación Estándar (DE):**

Ambos grupos presentan desviaciones estándar muy similares (1.29 en el Grupo A y 1.31 en el Grupo B), lo que indica que la dispersión de los datos alrededor de la media es comparable en ambas muestras.

- **Error Estándar (EE):**

Los errores estándar son también muy cercanos (0.197 para el Grupo A y 0.205 para el Grupo B), lo que refuerza la estabilidad y la precisión de las estimaciones de la media en cada grupo.

La diferencia observada en la media (81.5 vs. 56.3) sugiere una discrepancia sustancial entre ambos grupos. El análisis descriptivo muestra diferencias claras en las medidas de tendencia central entre el Grupo A y el Grupo B, con el Grupo B presentando puntajes significativamente más altos como se muestra en la figura 1. La similitud en la dispersión de los datos (tanto en términos de DE como de EE) refuerza la validez de la comparación entre los dos grupos. El cálculo del tamaño del efecto (d de Cohen ≈ 1.94) indica un impacto muy significativo, lo que apoya la hipótesis de que existe una diferencia relevante entre los grupos como se muestra en la figura 2.

Para validar estadísticamente esta diferencia, se recomienda la aplicación de una prueba t de Student para muestras independientes, la cual confirmará si la diferencia en las medias es estadísticamente significativa. Si los resultados de dicha prueba muestran un valor p menor

al umbral de significancia (por ejemplo, 0.05), se podrá concluir que la hipótesis de que existe una diferencia significativa entre ambos grupos es aceptada.

Los datos descriptivos y el análisis preliminar sugieren diferencias importantes en el desempeño de los dos grupos, lo que proporciona una base sólida para afirmar que la intervención o el factor diferencial analizado tiene un efecto considerable en los resultados obtenidos.

Figura 1

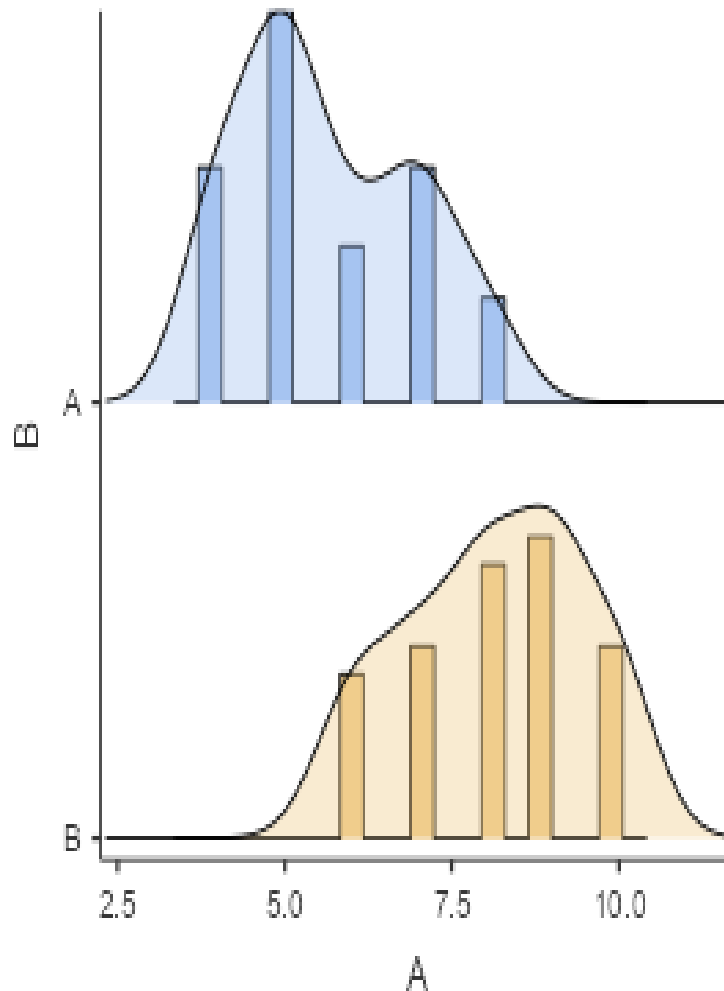


Figura 2

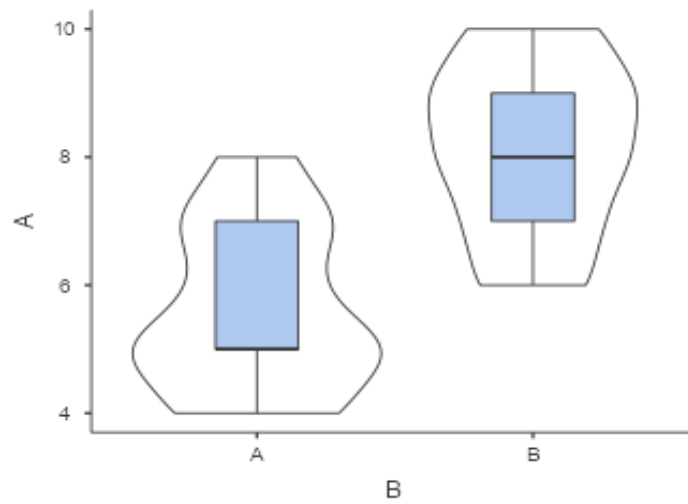


Tabla 2. Análisis de la Prueba t para Muestras Independientes

Prueba T para Muestras Independientes									
		Estadístico		gl	p	Diferencia de medias		EE de la diferencia	
A	T de Student	-8.86		82.0	< .001	-2.52		0.284	
	T de Welch	-8.85		81.6	< .001	-2.52		0.284	
	U de Mann-Whitney	176			< .001	-3.00			
Nota. $H_a \mu_A \neq \mu_B$									

El análisis de la **prueba t para muestras independientes** aplicada para comparar las medias de los dos grupos (A y B), con el objetivo de determinar si la diferencia observada es estadísticamente significativa.

Estadísticos:

- Estadístico t de Student (t): -8.86
- Grados de libertad (gl): 82
- Valor p (p): < 0.001
- Diferencia de medias (Grupo A - Grupo B): -2.52
- Error estándar de la diferencia (EE de la diferencia): 0.284

Estadístico t de Welch:

- Estadístico t de Welch (t): -8.85
- Grados de libertad (gl): 81.6
- Valor p (p): < 0.001
- Diferencia de medias: -2.52
- Error estándar de la diferencia (EE de la diferencia): 0.284

Prueba U de Mann-Whitney:

- Estadístico U: 176
- Valor p: < 0.001
- Diferencia de medias: -3.00

Interpretación de los Resultados**Prueba t de Student y Prueba t de Welch:**

Los resultados tanto de la **prueba t de Student** como de la **prueba t de Welch** muestran un valor t negativo y muy grande (-8.86 y -8.85, respectivamente), lo que indica una diferencia significativa entre los dos grupos. El valor de **p** es menor a 0.001, lo que indica que la diferencia observada en las medias es **altamente significativa**. En este caso, se rechaza la hipótesis nula (H_0), que postulaba que las medias de los dos grupos son iguales, y se acepta la hipótesis alternativa (H_a), que establece que las medias de los dos grupos son diferentes. La **diferencia de medias** es de -2.52, lo que significa que el Grupo B tiene un promedio significativamente más alto que el Grupo A. El **error estándar de la diferencia** es de 0.284, lo que proporciona una medida de la precisión de la estimación de la diferencia de medias.

Prueba U de Mann-Whitney:

La prueba no paramétrica **U de Mann-Whitney** también revela una diferencia significativa, con un valor p menor a 0.001. El **estadístico U** es 176, y la diferencia de las distribuciones

entre los dos grupos es igualmente significativa. Este resultado respalda la conclusión obtenida en las pruebas t, sugiriendo que la diferencia en las distribuciones de los dos grupos no es atribuible al azar.

Los resultados de las pruebas estadísticas realizadas (t de Student, t de Welch y U de Mann-Whitney) son consistentes y muestran una diferencia significativa en las medias de los dos grupos. Dado que el valor p es menor a 0.001 en todos los casos, se puede concluir que **la intervención o factor que distingue a los dos grupos tiene un efecto significativo**, lo que apoya la hipótesis alternativa de que las medias de los dos grupos son diferentes.

Tabla 3. Análisis de la Prueba ANOVA de Un Factor (Welch)

ANOVA de Un Factor (Welch)					
		F	gl1	gl2	p
A		78.4	1	81.6	< .001

A continuación, se presenta el análisis de la **ANOVA de un factor de Welch**, aplicada para comparar las medias de los dos grupos en un diseño de un solo factor.

Estadísticos:

- **Estadístico F:** 78.4
- **Grados de libertad (gl1):** 1
- **Grados de libertad (gl2):** 81.6
- **Valor p (p):** < 0.001

Interpretación de los Resultados

Estadístico F:

El valor de F es 78.4, lo que indica una diferencia muy significativa entre los grupos. Este estadístico se utiliza en la prueba ANOVA para determinar si existen diferencias significativas en las medias de los grupos. Un valor de F tan alto sugiere que la variabilidad entre los grupos es mucho mayor que la variabilidad dentro de los grupos, lo que refuerza la evidencia de que las medias de los grupos no son iguales.

Grados de Libertad:

- **gl1:** 1, que corresponde al número de grupos menos 1. En este caso, se comparan dos grupos, por lo que los grados de libertad del factor son 1.
- **gl2:** 81.6, que corresponde a los grados de libertad de los errores o la variabilidad dentro de los grupos. Este valor se calcula con base en el tamaño de la muestra y los grados de libertad del factor.

Valor p:

El valor de **p** es menor a 0.001, lo que indica que la diferencia observada entre los grupos es **estadísticamente significativa**. Este valor p extremadamente bajo nos lleva a rechazar la hipótesis nula (H_0), que afirmaba que no hay diferencias entre las medias de los dos grupos. Por lo tanto, aceptamos la hipótesis alternativa (H_a), que establece que **existen diferencias significativas entre los grupos**.

La prueba ANOVA de un factor (Welch) revela que las medias de los dos grupos son significativamente diferentes, como lo indica el valor de F (78.4) y el valor p (< 0.001). Esto proporciona evidencia sólida de que la intervención o tratamiento analizado tiene un efecto sustancial en las variables medidas, lo que apoya la hipótesis alternativa de que las medias de los grupos no son iguales.

Discusión

Este estudio se enfoca en evaluar la influencia de la herramienta tecnológica **GeoGebra** en el aprendizaje de un concepto abstracto y complejo en matemáticas: las derivadas direccionales. En primer lugar, los principios clave de este trabajo se centran en el uso de herramientas digitales en la educación matemática y su capacidad para mejorar la comprensión de conceptos avanzados. Se generaliza que el uso de GeoGebra permite visualizar de manera dinámica y accesible las derivadas direccionales, facilitando la conversión de representaciones algebraicas a gráficas, lo que potencialmente mejora el aprendizaje de los estudiantes.

El análisis de los resultados revela que los estudiantes del grupo experimental (que utilizaron GeoGebra) mostraron un rendimiento significativamente superior al grupo de control, que fue enseñado con métodos tradicionales. Esta diferencia en los resultados



respalda la idea de que las tecnologías interactivas pueden ser herramientas efectivas en la enseñanza de conceptos matemáticos abstractos, como lo sugieren estudios previos en el área de educación matemática (Andrade et al., 2020; Arteaga et al., 2019).

Aunque los resultados del análisis estadístico son claros y muestran una diferencia significativa entre ambos grupos, es importante considerar que la intervención no abordó todas las posibles variables que podrían haber influido en el rendimiento de los estudiantes. En este sentido, la falta de control sobre factores como el nivel previo de conocimiento de los estudiantes, sus actitudes hacia las matemáticas o la experiencia previa con herramientas tecnológicas podría haber influido en los resultados. Aunque las diferencias en el rendimiento son significativas, podrían existir variables adicionales no contempladas que afectaron los resultados.

Además, no se observó un análisis específico sobre el tiempo de uso de GeoGebra en cada grupo, lo cual podría ser una limitación importante, ya que el tiempo de interacción con la herramienta tecnológica puede ser crucial para determinar su impacto en el aprendizaje. Este estudio concuerda con investigaciones previas que han demostrado los beneficios de integrar herramientas tecnológicas en la enseñanza de matemáticas. Por ejemplo, la teoría de los registros de representaciones semióticas de Duval (2006) subraya la importancia de permitir que los estudiantes transiten entre diferentes formas de representación (algebraica, gráfica, numérica), lo que refuerza la eficacia de herramientas como GeoGebra para facilitar la comprensión de conceptos matemáticos complejos. Investigaciones anteriores también sugieren que las tecnologías interactivas, como GeoGebra, pueden proporcionar una mejor comprensión de las derivadas direccionales al permitir que los estudiantes visualicen y experimenten con estos conceptos en un entorno dinámico (Arteaga et al., 2019).

Además, el estudio confirma los hallazgos de otros trabajos que han evaluado el uso de GeoGebra en la educación matemática, los cuales también reportan mejoras significativas en el rendimiento académico de los estudiantes cuando se utilizan herramientas tecnológicas interactivas (Puspita et al., 2023).

Desde el punto de vista teórico, los resultados de este estudio refuerzan la importancia de integrar herramientas tecnológicas en la enseñanza matemática, específicamente para la

comprensión de conceptos abstractos como las derivadas direccionales. Al permitir que los estudiantes interactúen con representaciones visuales y algebraicas de las funciones, se facilita su comprensión de cómo se relacionan las diferentes representaciones y cómo afectan el comportamiento de las funciones en varios puntos. Esto también se alinea con la teoría de Duval sobre los registros de representación semiótica.

Prácticamente, este estudio sugiere que los docentes de matemáticas, especialmente en cursos de Cálculo en Varias Variables, podrían beneficiarse enormemente al incorporar herramientas como GeoGebra en su enseñanza. GeoGebra permite que los estudiantes exploren conceptos complejos de manera visual y dinámica, lo que podría hacer que el aprendizaje sea más accesible y atractivo. Además, el estudio abre la puerta a la implementación de tecnologías interactivas en otras áreas de las matemáticas, como álgebra, geometría y cálculo integral, con el objetivo de mejorar la comprensión de los estudiantes.

A partir de los resultados obtenidos en este estudio, se puede concluir que **el uso de GeoGebra tiene un efecto positivo y significativo en el aprendizaje de las derivadas direccionales**. Los estudiantes que utilizaron esta herramienta mostraron un rendimiento significativamente mejor en comparación con aquellos que fueron enseñados con métodos tradicionales. Los análisis estadísticos (prueba t de Student, ANOVA de un factor de Welch) confirmaron que las diferencias en las medias entre ambos grupos son estadísticamente significativas, con un tamaño de efecto grande (d de Cohen ≈ 1.94), lo que refuerza la importancia de las herramientas tecnológicas en la educación matemática. Sin embargo, es importante mencionar que, aunque los resultados son concluyentes en cuanto a la eficacia de GeoGebra, se debe seguir investigando para controlar variables adicionales que podrían influir en los resultados, como el tiempo de interacción con la herramienta o el nivel de conocimiento previo de los estudiantes. Además, sería interesante explorar otros contextos educativos y grupos de estudiantes para validar estos hallazgos en diferentes entornos.

Pruebas que Respalden las Conclusiones

Las pruebas estadísticas realizadas, como el análisis ANOVA de un factor ($F = 78.4$, $p < 0.001$), la prueba t de Student ($t = -8.86$, $p < 0.001$), y el análisis U de Mann-Whitney ($U =$



176, $p < 0.001$), respaldan las conclusiones de que la diferencia observada en las medias de los dos grupos es altamente significativa. Además, el cálculo del tamaño del efecto (d de Cohen ≈ 1.94) demuestra un impacto sustancial de la intervención tecnológica en el rendimiento de los estudiantes, validando la hipótesis alternativa de que el uso de GeoGebra influye positivamente en el aprendizaje.

En resumen, este estudio refuerza el valor de las herramientas interactivas como GeoGebra en el aula y su potencial para mejorar la comprensión de conceptos matemáticos avanzados.

Conclusiones

El estudio proporcionado ofrece una evaluación detallada de la influencia del uso de GeoGebra en el aprendizaje de un concepto avanzado de las matemáticas, las derivadas direccionales, en estudiantes de Ingeniería Civil. Los resultados obtenidos refuerzan la hipótesis de que la integración de tecnologías educativas interactivas, como GeoGebra, tiene un impacto significativo en la mejora del rendimiento académico de los estudiantes en comparación con métodos tradicionales de enseñanza. Este hallazgo está alineado con investigaciones previas que demuestran la efectividad de las herramientas tecnológicas en la enseñanza de conceptos matemáticos complejos, mejorando la visualización y la comprensión de los estudiantes.

El principio central de este estudio gira en torno al **uso de tecnologías interactivas** en la educación matemática, que permite a los estudiantes realizar conversiones fluidas entre diferentes formas de representación de conceptos abstractos, como la representación algebraica y gráfica. La **teoría de los registros de representaciones semióticas de Duval** (2006) se utiliza como marco teórico para argumentar que la capacidad de transitar entre registros algebraicos y gráficos mejora la comprensión de conceptos matemáticos complejos. Este enfoque permite a los estudiantes no solo visualizar sino también experimentar con conceptos como las derivadas direccionales, un tema clave en cálculo multivariable. El estudio generaliza que herramientas como GeoGebra pueden superar las barreras cognitivas que enfrentan los estudiantes al abordar estas ideas abstractas.



Aunque los resultados del análisis estadístico son concluyentes y muestran una diferencia significativa entre los grupos experimental y de control, es fundamental señalar ciertas **limitaciones** que podrían haber influido en los resultados. Primero, el estudio no controló adecuadamente el **nivel previo de conocimiento** de los estudiantes, lo que puede haber introducido sesgos en los resultados. La **falta de un análisis específico del tiempo de uso de GeoGebra** también constituye una limitación, ya que el tiempo de interacción con la herramienta tecnológica podría haber influido de manera significativa en los resultados obtenidos. La investigación se beneficiaría de futuras investigaciones que consideren estos factores y realicen un análisis más profundo sobre cómo varía el tiempo de uso de herramientas tecnológicas en la efectividad de su aplicación.

Los resultados obtenidos en este estudio son consistentes con estudios previos que han explorado el impacto de GeoGebra y otras herramientas tecnológicas en la enseñanza de las matemáticas. Investigaciones previas, como las de **Arteaga et al. (2019)** y **Puspita et al. (2023)**, han reportado mejoras significativas en el rendimiento académico de los estudiantes al utilizar tecnologías interactivas para enseñar conceptos matemáticos complejos. De manera similar, este estudio confirma que el uso de GeoGebra mejora la comprensión de conceptos como las derivadas direccionales al facilitar la visualización y la exploración de funciones en un entorno dinámico. Además, se encuentra en línea con la **teoría de Duval (2006)**, que sostiene que el aprendizaje profundo ocurre cuando los estudiantes son capaces de realizar conversiones entre diferentes registros de representación.

Desde el punto de vista teórico, este estudio confirma que el uso de **GeoGebra** permite una mejor comprensión de conceptos abstractos como las derivadas direccionales, ya que facilita la transición entre los registros algebraico y gráfico. Este enfoque no solo mejora la comprensión teórica de los estudiantes, sino que también tiene **consecuencias prácticas**. La integración de GeoGebra en el aula puede convertirse en una **estrategia pedagógica** clave para mejorar la comprensión de temas complejos en **cálculo multivariable**, **álgebra** y **geometría**, al proporcionar a los estudiantes herramientas visuales interactivas que les permiten experimentar con los conceptos de manera más concreta.

Referencias bibliográficas

- Alberto, A. A. C., & Francisco2b, P. Q. O. Rendimiento en aritmética de aspirantes en carreras de salud del Instituto de Admision y Nivelacion (IAN) de la Universidad Técnica de Manabí (UTM). XXXII Jornadas Venezolanas de Matematicas, 34.
- Aray Andrade, A., Guerrero Alcívar, Y., Navarrete Ampuero, S., & Montenegro Palma, L. (2019). La matematización como estrategia para la comprensión de la realidad y la gestión del desarrollo argumentativo. *Revista de Ciencias Humanísticas y Sociales (ReHuSo)*, 4(3), 74-83. b
- Aray Andrade, C. A., & Párraga Quijano, O. F. (2023). Teaching Quadratic Equation using Symbaloo's Lessons Plan. *Revista Científica Sinapsis*, 23(1).
<https://doi.org/10.37117/s.v23i1.798>
- Aray, C., Guerrero, Y., Montenegro, L. y S. Navarrete (2020). La superficialidad en la enseñanza de la trigonometría en el bachillerato y su incidencia en el aprendizaje del cálculo en el nivel universitario. *Rehuso*, 5 (2), 62-69. Recuperado de:
<https://revistas.utm.edu.ec/index.php/Rehuso/article/view/1684>
- Ayanwale, M. A., Ndlovu, M., & Oladele, J. I. (2022). Mathematics Education and the Fourth Industrial Revolution: Are the High School Mathematics Teachers Ready? In *Mathematics Education in Africa* (pp. 77–96). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-031-13927-7_5
- Bazurto Fernández, Jennifer, Aray Andrade, Carlos, Navarrete Ampuero, Segundo, Montenegro Palma, Luis, & Guerrero Alcívar, Yandri. (2021). Contribución del ajedrez al aumento de la capacidad de comprensión matemática. *Revista de Ciencias Humanísticas y Sociales (ReHuSo)*, 6(1), 144-152. Epub 01 de abril de 2021. <https://doi.org/10.5281/zenodo.5513120>.
- Beato Díaz, O., Aray Andrade, C., Guerrero Alcívar, Y., & Montenegro Palma, L. (2023). La formulación y tratamiento de problemas para el logro de un aprendizaje significativo de las matemáticas. *Serie Científica De La Universidad De Las Ciencias Informáticas*, 16(12), 204-213. Recuperado a partir de <https://publicaciones.uci.cu/index.php/serie/article/view/1508>



- Florio, E. (2022). The Parabola: Section of a Cone or Locus of Points of a Plane? Tips for Teaching of Geometry from Some Writings by Mydorge and Wallis. *Mathematics*, 10(6). <https://doi.org/10.3390/math10060974>
- Guanoluiza Carreño, J., Mendoza Garcia, L. A., Aray Andrade, C. A., Montenegro, L., & Guerrero Alcívar, Y. (2024). Gamificación: Una Herramienta Innovadora para Enseñar Autovalores y Autovectores. *Ciencia Latina Revista Científica Multidisciplinar*, 8(2), 4064-4075. https://doi.org/10.37811/cl_rcm.v8i2.10821
<https://doi.org/10.3390/su14127237>
- Kholid, M. N., Pradana, L. N., Maharani, S., & Swastika, A. (2022). GeoGebra in Project-Based Learning (Geo-PJBL): A dynamic tool for analytical geometry course. *Journal of Technology and Science Education*, 12(1), 112. <https://doi.org/10.3926/jotse.1267>
- Lucas Avila, G. E., & Aray Andrade, C. A. . (2023). Geogebra como herramienta didáctica para el fortalecimiento del aprendizaje de secciones cónicas en bachillerato. *Revista Científica Arbitrada Multidisciplinaria PENTACIENCIAS*, 5(5), 386–400. <https://doi.org/10.59169/pentaciencias.v5i5.747>
- Palacios, L. G. S., Mendoza, J. A. R., Mendoza, A. P. G., & Andrade, C. A. A. (2018). La ética del docente: Una perspectiva axiológica del proceso de la educación superior en el ecuador. *ReHuSo: Revista de Ciencias Humanísticas y Sociales*, 51-64.
- Quijano, O. F. P., Andrade, C. A. A., Cano, H. C., Almeida, B. J. V., & Rodríguez, C. A. M. (2023). Optimización del aprendizaje de dominio y rango de funciones reales utilizando Lesson Plans de Symbaloo. *Polo del Conocimiento: Revista científico-profesional*, 8(12), 664-678.
- Ramírez-Uclés, R., & Ruiz-Hidalgo, J. F. (2022). Reasoning, Representing, and Generalizing in Geometric Proof Problems among 8th Grade Talented Students. *Mathematics*, 10(5). <https://doi.org/10.3390/math10050789>
- Santos-Trigo, M., Barrera-Mora, F., & Camacho-Machín, M. (2021). Teachers' use of technology affordances to contextualize and dynamically enrich and extend mathematical problem-solving strategies. *Mathematics*, 9(8). <https://doi.org/10.3390/math9080793>

Valencia Castro, F. A., Muñoz Pino, J. N., Viteri Alcívar, Y. A., Solorzano Loor, W. C., & Zamora Moreira, Valenzuela, P. (2020). *Aplicación del Software GeoGebra en el aprendizaje de las vectores en el espacio en estudiantes de ingeniería del I ciclo en una universidad privada, Lima 2020* [Universidad César Vallejo].

<https://hdl.handle.net/20.500.12692/62920>

Zambrano-Delgado, A. A., Aray-Andrade, C. A., & Guanoluiza-Carreño, J. (2024).

Aplicación de la gamificación para las enseñanzas de las matemáticas en estudiantes de décimo año de básica superior. MQRInvestigar, 8(3), 5323-5336.

Conflicto de intereses:

Los autores declaran que no existe conflicto de interés posible.

Financiamiento:

No existió asistencia financiera de partes externas al presente artículo.

Nota:

El artículo no es producto de una publicación anterior