Vol.8 No.3 (2024): Journal Scientific MQR Investigar ISSN: 2588–0659
https://doi.org/10.56048/MQR20225.8.3.2024.5337-5361

# The use of puzzles for teaching factorization

# El uso de rompecabezas para la enseñanza de factorización

**Autores:**

Zambrano-Zambrano, Aristides
UNIVERSIDAD TÉCNICA DE MANABÍ
Facultad de Posgrado
Portoviejo-Ecuador

. lzambrano9138@utm.edu.ec

https://orcid.org/0009-0003-1856-658X

Montenegro-Palma, Luis
UNIVERSIDAD TÉCNICA DE MANABÍ
Departamento Matemáticas y Estadística, Facultad de Ciencias Básicas
Portoviejo-Ecuador

luis.montenegro@utm.edu.ec

https://orcid.org/0000-0003-1998-1390

Bravo-Saltos, Rosalba Karen
UNIVERSIDAD TÉCNICA DE MANABÍ
Departamento Matemáticas y Estadística, Facultad de Ciencias Básicas
Portoviejo-Ecuador

. rosalba.bravo@utm.edu.ec

lzambrano9138@utm.edu.ec

https://orcid.org/0000-0002-3991-864X

Fechas de recepción: 15-AGO-2024 aceptación: 08-SEP-2024 publicación: 15-SEP-2024
https://orcid.org/0000-0002-8695-5005
http://mqrinvestigar.com/

## Resumen

El estudio demuestra que la gamificación, implementada mediante el uso de rompecabezas en la enseñanza de la factorización en matemáticas, tuvo un impacto positivo y significativo en el aprendizaje del grupo experimental en comparación con el grupo control. El análisis descriptivo revela que el grupo experimental obtuvo una media de 7.52, superando los 5.26 del grupo control, con una diferencia de 2.26 puntos. Las pruebas estadísticas, incluyendo la Prueba T de Student, T de Welch y U de Mann-Whitney, indican diferencias significativas entre los grupos, con p-valores menores a 0.001. Además, el ANOVA confirmó estos hallazgos con un valor F de 49.6 y un p-valor inferior a 0.001, reforzando la existencia de una diferencia estadísticamente significativa en el rendimiento académico. En conclusión, el uso de rompecabezas como herramienta didáctica favorece un aprendizaje más efectivo y significativo, resaltando su valor como estrategia pedagógica en la enseñanza de matemáticas.


**Palabras clave:** Gamificación; Factorización; Rendimiento académico; Rompecabezas

## Abstract

The study shows that gamification, implemented through the use of puzzles in the teaching of factoring in mathematics, had a positive and significant impact on the learning of the experimental group compared to the control group. The descriptive analysis reveals that the experimental group obtained a mean of 7.52, surpassing the 5.26 of the control group, with a difference of 2.26 points. Statistical tests, including Student's T-test, Welch's T-test and Mann-Whitney U-test, indicate significant differences between the groups, with p-values less than 0.001. Furthermore, ANOVA confirmed these findings with an F-value of 49.6 and a p-value of less than 0.001, reinforcing the existence of a statistically significant difference in academic performance. In conclusion, the use of puzzles as a didactic tool favors more effective and meaningful learning, highlighting its value as a pedagogical strategy in the teaching of mathematics.

Key words: Gamification; Factorization; Academic performance; Puzzles

# Introducción

La enseñanza de la factorización en matemáticas constituye una piedra angular dentro del currículo escolar debido a su papel fundamental en la resolución de problemas algebraicos, tanto en niveles básicos como avanzados. La factorización, implica descomponer expresiones algebraicas complejas en factores más simples, no solo facilita la resolución de ecuaciones, sino que también permite una mejor comprensión de las propiedades y relaciones matemáticas subyacentes, así como el análisis de funciones y otros conceptos más complejos dentro de las matemáticas.

Esta habilidad es indispensable en la transición hacia el aprendizaje de otros conceptos matemáticos, como los polinomios, las ecuaciones cuadráticas y las funciones algebraicas. Dominar la factorización no solo habilita a los estudiantes para resolver problemas más sofisticados, sino que también les proporciona herramientas para abordar otras ramas de la matemática y la ciencia, tales como la física y la ingeniería, donde el álgebra y la resolución de ecuaciones juegan un papel crucial. Así, la factorización es, sin duda, una habilidad esencial dentro del repertorio matemático de cualquier estudiante.

A pesar de su importancia, el aprendizaje de la factorización representa un obstáculo para muchos estudiantes. Esto se debe, en gran medida, a la naturaleza abstracta del concepto y la lógica estructurada que requiere su correcta aplicación. Para los estudiantes, especialmente aquellos que tienen dificultades con el pensamiento abstracto, la factorización puede parecer desconectada de su experiencia cotidiana, lo que genera desinterés y frustración. Además, los métodos tradicionales de enseñanza, como la instrucción directa y la repetición de ejercicios, si bien han demostrado ser efectivos en algunos contextos, no siempre logran captar el interés de los estudiantes ni generan una comprensión profunda y significativa de los conceptos.

Frente a este desafío, la innovación pedagógica ha sido clave para hacer más accesible y atractiva la enseñanza de la factorización. Los enfoques didácticos contemporáneos abogan por métodos interactivos y participativos que involucren más activamente a los estudiantes en su proceso de aprendizaje. En este contexto, el uso de rompecabezas, juegos educativos y actividades lúdicas ha ganado popularidad como una herramienta eficaz para la enseñanza de conceptos matemáticos complejos, como la factorización.

Los rompecabezas matemáticos ofrecen una manera tangible y visual de abordar la factorización, convirtiendo una habilidad abstracta en una experiencia concreta que los estudiantes pueden manipular y explorar. Al resolver rompecabezas, los estudiantes pueden descomponer visualmente un problema en partes más simples, lo que facilita no solo la comprensión del proceso de factorización, sino también la retención a largo plazo del conocimiento. Este enfoque lúdico transforma el aprendizaje en una actividad más atractiva y entretenida, lo que incrementa significativamente la motivación y el compromiso del estudiante con la materia.

El uso de rompecabezas y juegos también promueve un aprendizaje activo, en el cual los estudiantes no son receptores pasivos de información, sino participantes activos en la construcción de su propio conocimiento. Esta metodología fomenta el desarrollo de habilidades clave, como el pensamiento crítico, la resolución de problemas y la colaboración. Los estudiantes aprenden a analizar problemas desde diferentes ángulos, a formular estrategias de solución y a trabajar en equipo, habilidades que son transferibles a otros ámbitos tanto académicos como de la vida diaria (Álvarez y Norailith, 2019).

Diversos estudios internacionales han puesto de manifiesto los beneficios de integrar los rompecabezas en la enseñanza de matemáticas. Por ejemplo, investigaciones en Australia han mostrado cómo el uso de rompecabezas y otros enfoques interactivos en la enseñanza del álgebra no solo mejora el rendimiento académico, sino que también fortalece la comprensión conceptual de los estudiantes. En Finlandia, un país reconocido por su alto rendimiento en matemáticas a nivel mundial se ha subrayado la importancia de emplear métodos de enseñanza innovadores que incluyan juegos y actividades lúdicas para facilitar una comprensión más profunda de los conceptos algebraicos.

En América Latina, también ha habido esfuerzos significativos para integrar estas metodologías en la enseñanza de matemáticas. En Ecuador, por ejemplo, estudios como el de Natalia Sgreccia (2023) han evaluado el impacto del uso de rompecabezas matemáticos en la enseñanza de la factorización, encontrando que los estudiantes que emplearon este tipo de actividades lúdicas mostraron una mejor comprensión y retención de los conceptos algebraicos que aquellos que se adhirieron a métodos tradicionales. Esta investigación destaca el papel del aprendizaje activo y la importancia de ofrecer a los estudiantes experiencias educativas que vayan más allá de la memorización mecánica de fórmulas y procedimientos.

Otro ejemplo es el estudio de Carreño (2024) en la Universidad Técnica de Manabí, donde se analizó la efectividad de los juegos educativos en la enseñanza de la matemática. Los resultados mostraron que los estudiantes que participaron en actividades lúdicas experimentaron una mayor motivación, además de obtener mejores resultados académicos. Estas experiencias demuestran que la incorporación de juegos y rompecabezas en el aula no solo mejora el rendimiento académico, sino que también contribuye a crear un entorno de aprendizaje más positivo y estimulante.

El impacto de los rompecabezas en el aprendizaje de la factorización también ha sido respaldado por autores como Rizzo y Roumieu (2000), quienes utilizaron la manipulación de rectángulos y el cálculo de áreas para enseñar identidades algebraicas. Estos rompecabezas geométricos ayudaron a los estudiantes a conectar el álgebra con el espacio geométrico, facilitando una mejor comprensión de las relaciones entre las representaciones algebraicas y geométricas. Ballén Novoa (2012) también destacó cómo el uso de rompecabezas geométricos incrementa la motivación y mejora la comprensión de los conceptos algebraicos.

Además, los juegos educativos pueden actuar como una herramienta eficaz para transformar la percepción que muchos estudiantes tienen de las matemáticas. A menudo, esta disciplina es vista como aburrida, difícil o intimidante. Sin embargo, los juegos tienen el poder de cambiar esta percepción al introducir un elemento de diversión y curiosidad en el aprendizaje. García Azcárate (2019) destaca que los juegos en el aula fomentan la cooperación entre los estudiantes y ayudan a desmitificar la idea de que las matemáticas son una materia árida y complicada (Lucas y Aray, 2023).

**Beneficios del Uso de Rompecabezas en la Factorización**

1. **Engagement y motivación**: Los rompecabezas convierten el aprendizaje en una actividad más dinámica y atractiva. Los estudiantes suelen mostrar más interés y entusiasmo al enfrentarse a retos que combinan lógica y creatividad. La gamificación del aprendizaje mediante rompecabezas ayuda a mantener el interés de los alumnos durante lecciones que de otro modo podrían parecer monótonas o difíciles.
2. **Visualización de conceptos abstractos**: La factorización, al ser un concepto abstracto para muchos estudiantes, puede ser difícil de visualizar solo con teoría. Los rompecabezas proporcionan una representación tangible de estos conceptos, ayudando a los estudiantes a "ver" las relaciones entre los términos algebraicos y los factores, lo que refuerza su comprensión.
3. **Trabajo en equipo y colaboración**: El uso de rompecabezas en el aula fomenta un ambiente colaborativo. Los estudiantes pueden trabajar juntos para resolver problemas, intercambiar ideas y descubrir soluciones. Esto no solo mejora su comprensión del tema, sino que también refuerza habilidades sociales como la comunicación, la cooperación y el respeto por diferentes puntos de vista.
4. **Refuerzo del aprendizaje**: Los rompecabezas permiten a los estudiantes aplicar activamente los conocimientos adquiridos. Al resolver estos desafíos prácticos relacionados con la factorización, los estudiantes refuerzan lo aprendido en clase, consolidando su comprensión de manera más duradera.
5. **Desarrollo de habilidades cognitivas**: La resolución de rompecabezas requiere que los estudiantes piensen de manera lógica y estructurada, habilidades que son

esenciales no solo en matemáticas, sino en una amplia gama de disciplinas. Además, al enfrentar diferentes tipos de problemas, los alumnos mejoran su capacidad de análisis y resolución de problemas.

**Aplicaciones Prácticas en la Enseñanza de la Factorización**

Existen diversas maneras de incorporar rompecabezas para enseñar factorización de manera efectiva. A continuación, se detallan algunas estrategias que se pueden implementar en el aula:

1. **Rompecabezas de Números**: Estos rompecabezas pueden centrarse en la descomposición de números en sus factores primos. Los estudiantes pueden trabajar con tarjetas o piezas de rompecabezas que representen diferentes números y sus posibles factores, ayudando a construir una comprensión básica de la factorización de números enteros. Esta actividad es útil para introducir el concepto de factorización antes de pasar a expresiones algebraicas más complejas.
2. **Rompecabezas de Productos Notables**: Utilizar piezas de rompecabezas que representen términos algebraicos y productos notables (como el cuadrado de binomios o la diferencia de cuadrados) permite a los estudiantes familiarizarse con estos conceptos de una manera más visual e interactiva. Los estudiantes pueden combinar las piezas para formar expresiones algebraicas, reforzando su conocimiento de los productos notables y cómo se utilizan en la factorización.
3. **Rompecabezas de Trinomios Cuadrados Perfectos**: Los trinomios cuadrados perfectos son una de las formas más comunes de factorización. Proporcionar a los estudiantes trinomios ya factorizados y pedirles que encuentren los binomios correspondientes que los forman puede ayudar a solidificar este concepto clave. Los estudiantes pueden visualizar la relación entre los términos de los trinomios y sus factores, lo que facilita su comprensión.
4. **Rompecabezas de Factorización de Polinomios**: Para niveles más avanzados, se pueden diseñar rompecabezas en los que los estudiantes descompongan polinomios complejos en factores más simples. Usar piezas de rompecabezas que representen términos o factores específicos permite a los estudiantes practicar cómo descomponer un polinomio en sus componentes más básicos, fortaleciendo su capacidad para manejar expresiones algebraicas complejas.
5. **Rompecabezas de Ecuaciones Cuadráticas**: Crear un rompecabezas que involucre la resolución de ecuaciones cuadráticas mediante la factorización permite a los estudiantes aplicar sus conocimientos de una manera más desafiante. Después de factorizar la ecuación, los estudiantes deben encontrar los valores de las variables que

satisfacen la ecuación, integrando varias etapas del proceso de resolución de problemas.

**Implementación de Rompecabezas en el Aula**

La implementación efectiva de rompecabezas en la enseñanza de la factorización requiere planificación y adaptaciones que respondan al nivel de conocimiento de los estudiantes. Algunas sugerencias para su implementación incluyen:

- **Diseño adaptado al nivel de los estudiantes**: Es fundamental que los rompecabezas estén diseñados de acuerdo con el nivel de los estudiantes. Para los principiantes, los rompecabezas más simples que involucren la factorización de números pueden ser adecuados, mientras que los estudiantes más avanzados pueden enfrentarse a rompecabezas que incluyan polinomios y ecuaciones más complejas.
- **Integración con la teoría**: Los rompecabezas deben complementar las lecciones teóricas. Por ejemplo, después de explicar los productos notables en clase, los estudiantes pueden resolver rompecabezas que les permitan aplicar inmediatamente lo aprendido. Esto refuerza el conocimiento y permite una transición fluida de la teoría a la práctica.
- **Actividades individuales y grupales**: Los rompecabezas pueden ser resueltos tanto individualmente como en grupo. Las actividades individuales fomentan la autonomía del estudiante, mientras que las actividades en grupo promueven el trabajo colaborativo y la discusión de estrategias. Alternar entre ambas dinámicas ofrece una experiencia de aprendizaje más completa.
- **Evaluación continua y adaptaciones**: Es importante que los docentes evalúen el progreso de los estudiantes a lo largo del tiempo y adapten los rompecabezas en función de sus necesidades. A medida que los estudiantes dominan ciertos aspectos de la factorización, se pueden introducir rompecabezas más desafiantes para mantener el interés y el crecimiento académico.

**Estudio de Caso: Implementación en Ecuador**

Este enfoque de enseñanza se está llevando a cabo en la **Unidad Educativa Elías Cedeño Jerves** en Canoa, Ecuador. La implementación del uso de rompecabezas en las clases de matemáticas tiene como objetivo mejorar la comprensión de los estudiantes en álgebra, específicamente en la factorización, y aumentar su interés y motivación hacia las matemáticas en general. A través de esta metodología, se espera no solo un aumento en el rendimiento académico, sino también un cambio positivo en la actitud de los estudiantes hacia una materia que a menudo consideran difícil o aburrida. Los docentes también están evaluando continuamente el impacto de esta metodología y ajustando los rompecabezas para adaptarse al nivel de los estudiantes.

El uso de rompecabezas para la enseñanza de la factorización en matemáticas tiene el potencial de transformar el aprendizaje de una habilidad abstracta en una experiencia interactiva, visual y colaborativa. Al proporcionar a los estudiantes herramientas concretas para descomponer y entender los conceptos algebraicos, los rompecabezas no solo hacen que las matemáticas sean más accesibles, sino que también fomentan un aprendizaje más profundo y significativo. Esta metodología, además, promueve el desarrollo de habilidades esenciales que van más allá de las matemáticas, preparando a los estudiantes para enfrentar problemas complejos en su vida académica y personal (Aray et al., 2020).

## Material y métodos

A partir de los trabajos realizados por Rizzo y Roumieu (2000) y las experiencias pedagógicas presentadas por Rizzo et al. (2014), se desarrolló una investigación que amplió el uso de rompecabezas en la enseñanza de la factorización. Este proyecto se llevó a cabo con estudiantes de tercer año de una escuela secundaria ubicada en el distrito de Quilmes, en la provincia de Buenos Aires, Argentina. Cabe destacar que esta institución es completamente subvencionada por el Estado Nacional, lo que subraya la relevancia de aplicar metodologías innovadoras en un contexto de educación pública, brindando a todos los estudiantes la oportunidad de acceder a herramientas pedagógicas más dinámicas.

El diseño de la experiencia educativa se estructuró a partir de la presentación de un "reto" inicial a los estudiantes, basado en rompecabezas. Este enfoque lúdico tenía como objetivo captar el interés de los alumnos desde el principio, incentivándolos a explorar activamente los conceptos matemáticos mediante la manipulación de piezas físicas. Este enfoque pedagógico no solo les permitió obtener respuestas correctas, sino también comprender los fundamentos que subyacen a los resultados obtenidos, lo que es crucial para una comprensión sólida y duradera de los principios algebraicos.

### Propuesta pedagógica en torno al factor común

Una parte central de la experiencia educativa se centró en la enseñanza del concepto de factor común, utilizando herramientas visuales y físicas para facilitar el proceso de aprendizaje. Se emplearon cuadrados y rectángulos representados en formato físico (como se ilustra en la figura 1), que los estudiantes podían manipular para visualizar y reorganizar los factores algebraicos en una representación geométrica. A través de esta actividad, se pedía a los estudiantes que reorganizaran las formas geométricas de manera que pudieran representar las expresiones algebraicas de manera alternativa, es decir, buscar la factorización de dichas expresiones.

Este enfoque permitía que los estudiantes vincularan el álgebra abstracta con representaciones geométricas concretas, lo que les ayudaba a visualizar la descomposición de los términos algebraicos en sus factores. Por ejemplo, al organizar adecuadamente los rectángulos y cuadrados, los estudiantes podían ver cómo un factor común en una expresión algebraica se correspondía con una dimensión compartida en los objetos geométricos, facilitando así la comprensión del concepto de factorización.

Un aspecto clave del éxito de esta metodología fue su capacidad para promover el pensamiento crítico y la resolución de problemas. Esto no solo enriqueció su experiencia de aprendizaje, sino que también fortaleció su capacidad para trabajar en equipo y aplicar el razonamiento lógico en situaciones diversas.

**Extensión de la propuesta a otros temas algebraicos**

La experiencia con los rompecabezas no se limitó únicamente a la enseñanza del factor común. La metodología también se aplicó a otros temas de factorización, como el factor común por agrupación, el cuadrado y el cubo de un binomio, y la diferencia de cuadrados. De este modo, la experiencia educativa no solo se limitó a la resolución mecánica de problemas, sino que alentó a los estudiantes a entender los fundamentos teóricos detrás de cada técnica de factorización.

La combinación de rompecabezas y actividades colaborativas ofrece una vía prometedora para la enseñanza de temas algebraicos como la factorización. Este enfoque no solo mejora la comprensión y retención de los conceptos, sino que también fomenta un ambiente de aprendizaje dinámico y participativo, donde los estudiantes se sienten motivados y empoderados para enfrentar los retos que plantea el estudio de las matemáticas.

a) $x^2 + ax + bx$
b) $z^2 + xz + az + bz$

Se emplearon preguntas orientadoras para guiar a los estudiantes en su proceso de descubrimiento, tales como: "¿Es posible formar un rectángulo con todas las piezas en cada caso?" y "Si es así, ¿cuál es el área obtenida?". Estas preguntas no solo estimulaban el pensamiento crítico, sino que también ayudaban a que los estudiantes identificaran de manera visual y práctica el concepto de factor común. A partir de sus respuestas y el trabajo colaborativo, los estudiantes iban revelando por sí mismos el factor común que compartían las expresiones algebraicas presentadas.

Una vez que los estudiantes comprendían el concepto, se les animaba a diseñar sus propios rompecabezas basados en el "factor común", lo que les brindaba una oportunidad para aplicar su conocimiento de manera creativa. Estos rompecabezas, que debían diseñar de manera que pudieran desafiar a sus compañeros, fomentaban la colaboración y el aprendizaje entre pares, al tiempo que reforzaban los conceptos matemáticos de una manera lúdica e interactiva. Esta actividad no solo les permitía consolidar lo aprendido, sino que también desarrollaba su capacidad para enseñar a otros y analizar problemas desde diferentes perspectivas.

La metodología fue repetida con distintas propuestas y se adaptó a diferentes niveles de dificultad a medida que los estudiantes avanzaban. Al trabajar en grupos, cada equipo abordaba el factor común utilizando piezas físicas, tanto cuadradas como rectangulares, que facilitaban la visualización y manipulación de los conceptos abstractos. Estas piezas, representadas en las figuras proporcionadas, permitían que los estudiantes comprendieran de forma tangible cómo se descomponían las expresiones algebraicas en factores más simples.

El enfoque por grupos no solo promovía el trabajo colaborativo, sino que también favorecía el desarrollo de habilidades sociales y de comunicación. Al compartir sus ideas y discutir posibles soluciones, los estudiantes adquirían confianza en sus capacidades y aprendían a valorar diferentes enfoques para resolver un mismo problema. Este tipo de dinámica de trabajo en equipo no solo mejoraba su comprensión matemática, sino que también fomentaba una actitud positiva hacia la resolución de problemas y el aprendizaje en general.

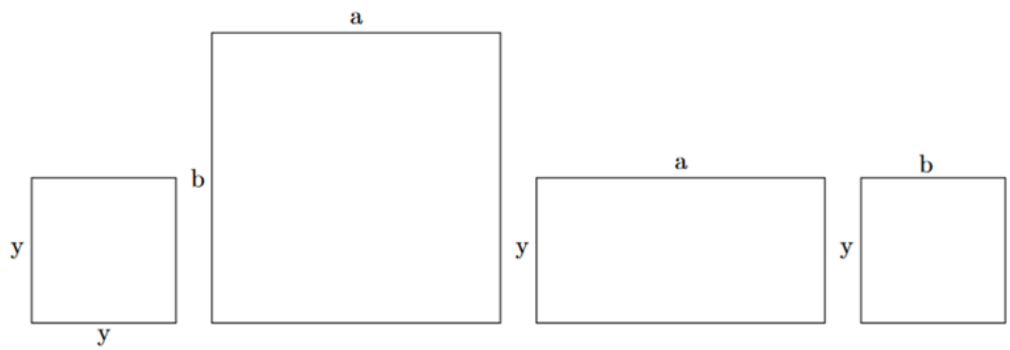
Además, al trabajar con piezas físicas, los estudiantes podían explorar visualmente el concepto de área, conectando el álgebra con la geometría de una manera práctica. El uso de estas herramientas manipulativas hacía que el aprendizaje fuera más dinámico y permitía que los conceptos abstractos, como el factor común, fueran más comprensibles para todos los estudiantes, independientemente de su estilo de aprendizaje.

Esta metodología no solo se limitaba al descubrimiento del factor común, sino que también abría la puerta a una comprensión más profunda de otros conceptos algebraicos. Al utilizar rompecabezas y piezas manipulativas, los estudiantes tenían la oportunidad de experimentar con los conceptos y encontrar soluciones de manera autónoma, lo que fortalecía su comprensión y les permitía aplicar lo aprendido en problemas más complejos.

**Propuesta en relación al factor común por grupos**

Trabajando de esta misma manera, se avanzaba en el factor común por grupos, proponiendo las piezas físicas cuadradas y rectangulares como muestra la figura 1

**Figura 1.**
**Factor común por grupos**




Considerando los cuadrados y rectángulos proporcionados, se solicitó a cada grupo de estudiantes que, en primer lugar, registraran la suma total de las áreas involucradas en la figura. Luego, se les pidió investigar si era posible sacar un factor común, como se había realizado en el trabajo de la figura anterior.

De no ser posible, se les indicó intentar agrupar de a dos las áreas de las cuatro piezas, y buscar el factor común entre cada par. Por último, después de revisar lo obtenido, reflexionar acerca de si se podía o no, y de qué manera, extraer un nuevo factor común que reagrupe lo hallado.

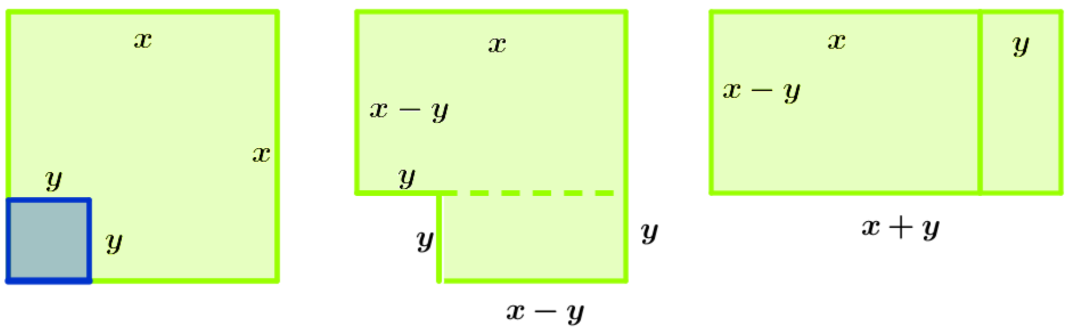
En base al trabajo y las respuestas de los estudiantes, se procedió a revelar el factor común por grupos. Asimismo, se invitó a los estudiantes a diseñar su propio rompecabezas de "factor común por grupos" para desafiar a sus compañeros.

## Propuesta sobre la diferencia de cuadrados

Siguiendo con las identidades algebraicas, se trabajó en la diferencia de cuadrados utilizando las áreas de los cuadrados y rectángulos ilustrados en la figura 6. Se guió a los estudiantes con la siguiente instrucción: "En un cuadrado de lado $x$, construye un cuadrado de lado $y$ en uno de sus vértices. Recorta el cuadrado de lado $y$. Luego, escribe el área de la figura que queda". La intención era ayudarles a llegar a la expresión $x^2 - y^2$. Para lograrlo, después de darles un tiempo para que usaran su creatividad e imaginación, se les animaba a recortar y formar alguna "figura conocida" que permitiera llegar a la expresión deseada. Si no se alcanzaba el objetivo, el docente intervenía con la siguiente indicación: "Ahora, en la figura que quedó, continúa recortando el rectángulo de lados $x$ y $y$. Luego, mueve las piezas para constituir un nuevo rectángulo. Una vez armado este último rectángulo, escribe su área". El propósito era que los estudiantes concluyeran que el área es $(x+y)\,(x-y)$ como muestra la figura 2.

**Figura 2.**

**Diferencia de cuadrados**




**Propuesta en relación al trinomio cuadrado perfecto**

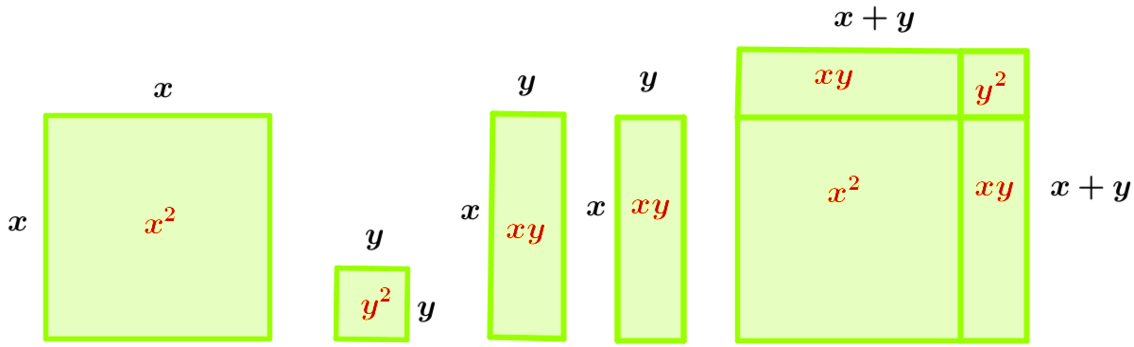
Continuando con las identidades algebraicas, para abordar el trinomio cuadrado perfecto, se dividió la clase en dos partes y se trabajó en pequeños grupos. A un grupo se le proporcionaron cuadrados y rectángulos, como los señalados en la columna izquierda de la figura 3, y se les orientó de la siguiente manera: "Escriban el área total de las siguientes piezas. Luego, formen un cuadrado con ellas y escriban su área".

Al otro grupo se le propuso tomar un cuadrado y crear con él su propio rompecabezas, siguiendo estas indicaciones: "Traza dos rectas perpendiculares de manera que se formen cuatro zonas: dos cuadrados y dos rectángulos congruentes. Denomina $x$ al lado del cuadrado de área mayor y $y$ al del área menor.

El objetivo de ambas partes de la clase era que los estudiantes pudieran construir el cuadrado mostrado en la segunda columna de la figura 8 y, finalmente, llegar a la identidad algebraica involucrada: $x^2+2xy+y^2=(x+y)^2$. Posteriormente, se les pedía expresar de dos formas distintas el área del cuadrado original como muestra la figura 3.

**Figura 3.**

**Suma de cuadrados**




## Propuesta sobre el cubo de un binomio

Cautivar a los estudiantes y ayudarlos a internalizar los contenidos fue primordial en esta experiencia. Aunque el trabajo con rompecabezas resulta atractivo e interesante, el tiempo requerido para su armado físico aumenta a medida que se complejizan los casos de factoreo.

Teniendo en cuenta este factor, para desarrollar el cubo de un binomio mediante rompecabezas, se pidió a los estudiantes que, de manera grupal, realizaran la construcción de los cuerpos involucrados. Se les brindaron instrucciones detalladas con suficiente antelación. Sin embargo, este trabajo se realizó casi en su totalidad en clase, ya que no lograron completarlo fuera del aula.

Durante el tiempo destinado a esta actividad, se discutió en clase sobre el cubo como cuerpo geométrico y sus propiedades. Aunque se esperaba que los estudiantes ya conocieran este tema por formar parte de los contenidos mínimos de su escolarización previa, resultó ser la primera vez que muchos de ellos oían hablar del tema.

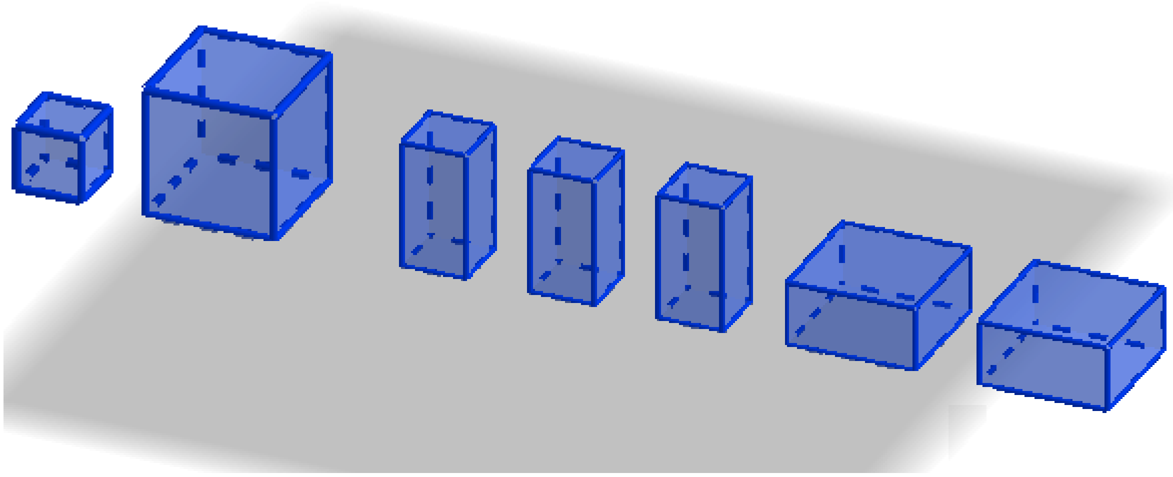
Una vez armado el cubo de un binomio mediante rompecabezas (como se muestra en la imagen inferior derecha de la figura 10), cada grupo trabajó en la búsqueda de su volumen mediante la suma de cada cuerpo involucrado. Luego, se relacionó con el volumen del cubo de lados "$x + y$", que es:

Volumen $= (x + y)^3 = (x + y) \cdot (x + y) \cdot (x + y)$. Después de un tiempo de trabajo y considerando las respuestas de los estudiantes, se reveló la fórmula del cubo de un binomio:

$$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

**Figura 4.**

**Suma de cubos**



La resolución algebraica se trabajó en pequeños grupos y, después de un tiempo, se realizaron puestas en común para llegar a la expresión correcta, mostrada en la figura 11. También se destacó la importancia de que ambos números utilizados sean distintos de cero.

La gamificación, entendida como un proceso de aprendizaje que se manifiesta de manera simple a través de insignias, puntos y tablas de clasificación, o de manera más compleja mediante entornos de simulación virtual (Bazurto et al., 2021), ha demostrado tener un efecto positivo en la motivación, el rendimiento académico y la autoeficacia de los estudiantes (Bodnar et al., 2016; Quijano y Aray, 2023). Aunque algunas investigaciones han señalado controversias sobre su efectividad, argumentando que puede afectar negativamente la motivación intrínseca y fomentar la competencia sobre la cooperación (Hanus & Fox, 2015), sigue siendo evidente que la gamificación puede ser una herramienta valiosa para mejorar la experiencia de aprendizaje.

En el diseño de juegos educativos, existen marcos conceptuales como el MDA (Mecánica, Dinámica, Estética) propuesto por Hunicke (2001), que pueden ayudar a comprender y mejorar el diseño de los mismos. Las mecánicas del juego describen los elementos, controles y reglas del juego, mientras que la dinámica se refiere a la experiencia de juego y la estética aborda la apariencia y el impacto emocional del juego (Quijano et al., 2023).

Para maximizar el efecto de la gamificación, es necesario combinar diversas mecánicas de juego de manera que se generen diferentes experiencias para los estudiantes, incentivando su participación y motivación (Gede et al., 2018; Aray et al., 2019). Introducir elementos como misiones seleccionables, mini-juegos y roles dentro del juego puede hacer que la experiencia sea más atractiva y estimulante, fomentando así un aprendizaje más efectivo (Alberto & Francisco, 2023). Además, la retroalimentación y la integración de realidad aumentada pueden mejorar la interactividad y el compromiso de los estudiantes en el proceso de aprendizaje (Diaz et al., 2023).

## Resultados y Discusión

Al utilizar los rompecabezas como una estrategia interactiva para mejorar el aprendizaje de matemáticas en los estudiantes de primer año de bachillerato paralelo “B” de en la **Unidad Educativa Elías Cedeño Jerves** en Canoa, después de haber identificado que no tenían conocimientos previos de factorización mediante una prueba diagnóstica, y al compararlo con el grupo de control paralelo "A" (que recibió enseñanza tradicional), se puede afirmar que la gamificación generó buenos resultados.

Se formularon dos hipótesis para evaluar el impacto de la gamificación. La **hipótesis nula** plantea que no existe diferencia entre las medias de los post-tests de ambos grupos $H_0: \bar{x}_{experimental} = \bar{x}_{control}$: es decir, la gamificación no influye en el aprendizaje de los productos notables. En contraste, la **hipótesis alternativa** sostiene que sí hay una diferencia significativa entre las medias $H_0: \bar{x}_{experimental} \neq \bar{x}_{control}$, indicando que la gamificación afecta positivamente el aprendizaje de dichos temas.

Para validar estas hipótesis, se realizó un análisis estadístico utilizando la prueba **T-Student**, y **ANAOVA** lo que permitió comparar las medias de ambos grupos. Estos análisis permitierón determinar si se debía aceptar o rechazar la hipótesis nula.

Los resultados estadísticos, presentados en las Tablas 1, 2 y 3, revelaron que, aunque ambos grupos mostraron mejoras significativas en el post-test, el grupo experimental obtuvo un promedio superior al grupo de control, con una diferencia de 2.723 puntos entre las medias.

Esto demuestra una clara diferencia en el rendimiento entre los dos grupos, sugiriendo que la gamificación tuvo un impacto positivo en el aprendizaje.

Tabla 1

Descriptivas de Grupo

| | Grupo | N | Media | Mediana | DE | EE |
|---|---|---|---|---|---|---|
| A | A | 23 | 5.26 | 5.00 | 1.01 | 0.211 |
| | B | 25 | 7.52 | 7.00 | 1.19 | 0.239 |

La tabla 2 proporciona las **estadísticas descriptivas** de dos grupos, **A** y **B**, con el propósito de comparar sus medidas centrales y de dispersión. Estas estadísticas son fundamentales para entender la distribución y características básicas de los datos antes de realizar inferencias más profundas.

## Descripción de los resultados por grupo:

### Grupo A:

- **Tamaño de la muestra (N)**: El grupo A está compuesto por **23** observaciones.
- **Media**: La media del grupo A es **5.26**, lo que representa el promedio de los valores observados en este grupo.
- **Mediana**: La mediana es **5.00**, lo que indica que la mitad de las observaciones en este grupo son menores o iguales a este valor, y la otra mitad son mayores. La cercanía entre la media y la mediana sugiere que los datos están relativamente simétricos, sin una gran dispersión o sesgo.
- **Desviación estándar (DE)**: La desviación estándar es de **1.01**, lo que refleja una dispersión moderada en los datos alrededor de la media.
- **Error estándar (EE)**: El error estándar es **0.211**, lo que indica la precisión de la estimación de la media. Un EE más pequeño sugiere una estimación más precisa.

### Grupo B:

- **Tamaño de la muestra (N)**: El grupo B contiene **25** observaciones.
- **Media**: La media del grupo B es **7.52**, superior a la media del grupo A, lo que indica que los valores promedio del grupo B son considerablemente mayores.
- **Mediana**: La mediana del grupo B es **7.00**, lo que también es superior a la mediana del grupo A. Esto sugiere que los valores centrales del grupo B son mayores.
- **Desviación estándar (DE)**: La desviación estándar en el grupo B es **1.19**, un poco más alta que en el grupo A, lo que sugiere una mayor variabilidad en los datos del grupo B.
- **Error estándar (EE)**: El error estándar es **0.239**, lo que implica una estimación de la media relativamente precisa, aunque un poco menos que en el grupo A debido a una mayor dispersión de los datos.

## Interpretación general:

- Comparando los dos grupos, se observa que **el grupo B tiene una media y mediana más altas que el grupo A**, lo que indica que en promedio, los valores del grupo B son mayores.
- La **desviación estándar** es ligeramente mayor en el grupo B, lo que indica una mayor dispersión de los datos alrededor de la media en comparación con el grupo A.
- Aunque el **error estándar** en ambos grupos es relativamente bajo, lo que sugiere que las estimaciones de la media son precisas, el valor del grupo B es un poco más elevado, probablemente debido a su mayor desviación estándar.

Los resultados descriptivos sugieren que hay una diferencia notable entre los grupos en términos de sus medidas centrales (media y mediana), con el grupo B mostrando valores consistentemente más altos que el grupo A. Además, los datos del grupo B presentan una mayor dispersión, aunque las estimaciones de la media en ambos grupos son precisas.

Tabla 2

**Prueba T para Muestras Independientes**

Prueba T para Muestras Independientes

| | | | | | | | Intervalo de Confianza al 95% | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | **Estadístico** | **gl** | **p** | **Diferencia de medias** | **EE de la diferencia** | **Inferior** | **Superior** |
| A | T de Student | -7.04 | 46.0 | < .001 | -2.26 | 0.321 | -Inf | -1.72 |

Prueba T para Muestras Independientes

| | | | | | | Intervalo de Confianza al 95% | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | **Estadístico** | **gl** | **p** | **Diferencia de medias** | **EE de la diferencia** | **Inferior** | **Superior** |
| T de Welch | -7.09 | 45.7 | < .001 | -2.26 | 0.318 | -Inf | -1.72 |
| U de Mann-Whitney | 48.0 | | < .001 | -2.00 | | -Inf | -2.00 |

Nota. $H_a$ $\mu_A < \mu_B$

El análisis de la tabla 2 corresponde a una **Prueba T para muestras independientes**, donde se comparan dos grupos con el objetivo de determinar si hay una diferencia significativa entre sus medias. Se utilizan tres pruebas diferentes: **T de Student**, **T de Welch** y **U de Mann-Whitney**, cada una con sus particularidades para el tratamiento de los datos. A continuación, se describe los resultados de cada una ellas.

**1. Prueba T de Student**

- **Estadístico (t)**: El valor del estadístico T obtenido es **-7.04** con **46 grados de libertad (g.l.)**. Este valor indica una diferencia sustancial entre las medias de los grupos comparados.
- **p-valor**: Es menor de **0.001**, lo cual sugiere que la diferencia observada entre los grupos es altamente significativa, es decir, que la probabilidad de que la diferencia observada se deba al azar es extremadamente baja.
- **Diferencia de medias**: La diferencia entre las medias de los dos grupos es de **-2.26**.
- **Error estándar (EE)**: El error estándar de la diferencia de medias es de **0.321**, lo cual mide la precisión de la estimación de la diferencia entre las medias.
- **Intervalo de confianza (95%)**: El intervalo de confianza para la diferencia de medias es entre **-1.72** y **-∞**. Este resultado implica que el valor real de la diferencia entre medias, con un 95% de confianza, se encuentra en ese rango. Sin embargo, el límite inferior infinito es anómalo en esta presentación y puede deberse a un error en la configuración del intervalo.

**2. Prueba T de Welch**

- **Estadístico (t)**: El valor del estadístico es **-7.09**, con **45.7 grados de libertad (g.l.)**. Esta prueba es una variante de la T de Student, utilizada cuando se sospecha que las varianzas de los grupos no son iguales. El valor obtenido refuerza la evidencia de una diferencia significativa entre los grupos.
- **p-valor**: También es menor de **0.001**, indicando significancia estadística.
- **Diferencia de medias**: La diferencia entre las medias de los grupos es de **-2.26**, igual que en la prueba T de Student.
- **Error estándar (EE)**: El error estándar de la diferencia es **0.318**.
- **Intervalo de confianza (95%)**: El intervalo de confianza es entre **-1.72** y **-**∞, lo que también refleja un error en la construcción del límite inferior.

**3. Prueba U de Mann-Whitney**

- **Estadístico (U)**: El valor del estadístico U es **48.0**, correspondiente a una prueba no paramétrica utilizada cuando no se puede asumir la normalidad en la distribución de los datos.
- **p-valor**: Es menor de **0.001**, lo que confirma que la diferencia entre los grupos es significativa.
- **Diferencia de medias**: La diferencia en las medianas es de **-2.00**, lo cual indica una disminución en la mediana del grupo comparado.
- **Intervalo de confianza (95%)**: El intervalo de confianza se presenta también con **-** ∞ como límite inferior, lo que nuevamente sugiere una posible inconsistencia en la construcción del intervalo.

Las tres pruebas sugieren una diferencia estadísticamente significativa entre los grupos, con un **p-valor** consistentemente menor a **0.001** en todas las pruebas. La magnitud de la diferencia de medias se estima alrededor de **-2.26**, mientras que el análisis de la prueba de Mann-Whitney indica una diferencia en la mediana de **-2.00**. No obstante, se observa un error en la presentación del intervalo de confianza, particularmente en el límite inferior que se muestra como infinito negativo, lo que debería revisarse.
De acuerdo con estos resultados, se rechaza la hipótesis nula (**$H_0$: µ_A < µ_B**) en favor de la hipótesis alternativa, que establece que las medias de los grupos no son iguales, siendo el grupo A significativamente menor en promedio.

**Gráficos 1**

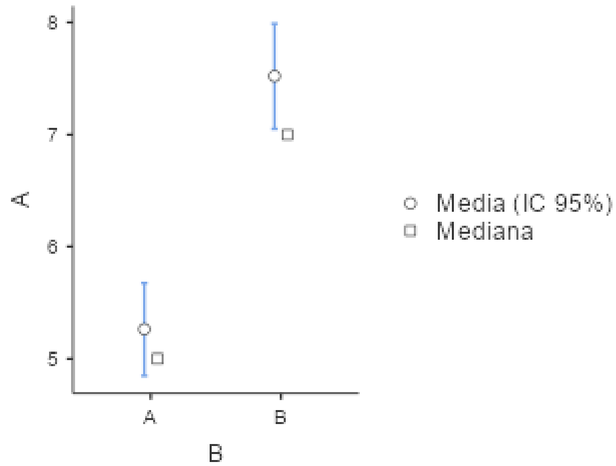



Tabla 3

**ANOVA**

ANOVA - A

| | Suma de Cuadrados | gl | Media Cuadrática | F | p |
|---|---|---|---|---|---|
| B | 61.1 | 1 | 61.14 | 49.6 | < .001 |
| Residuos | 56.7 | 46 | 1.23 | | |

La tabla 3 presenta los resultados de un análisis de varianza (**ANOVA**), utilizado para comparar la varianza entre grupos y dentro de los grupos, con el fin de determinar si las diferencias observadas entre las medias de los grupos son estadísticamente significativas. A continuación, se analiza detalladamente la tabla ANOVA:

**Componentes de la tabla:**

1. **Suma de Cuadrados**:
   - **B**: La suma de cuadrados entre los grupos es **61.1**, lo que indica la variabilidad atribuible a las diferencias entre los grupos.
   - **Residuos**: La suma de cuadrados dentro de los grupos (también conocida como variabilidad residual o de error) es **56.7**, representando la variabilidad debida a factores aleatorios o a diferencias no explicadas por el modelo.
2. **Grados de Libertad (g.l.)**:

- **B**: Los grados de libertad asociados a la variabilidad entre los grupos son **1**, lo cual refleja que se está comparando dos grupos (g.l. = número de grupos - 1).
- **Residuos**: Los grados de libertad dentro de los grupos son **46**, lo que representa el número total de observaciones menos el número de grupos (g.l. = N - número de grupos).

3. **Media Cuadrática**:
   - **B**: La media cuadrática entre los grupos es **61.14** (calculada dividiendo la suma de cuadrados entre los grupos por sus grados de libertad). Esta media cuadrática mide la variabilidad explicada por el factor entre grupos.
   - **Residuos**: La media cuadrática de los residuos es **1.23**, obtenida al dividir la suma de cuadrados de los residuos por los grados de libertad correspondientes. Esta mide la variabilidad dentro de los grupos.
4. **Estadístico F**:
   - El valor del estadístico **F** es **49.6**. Este estadístico se calcula dividiendo la media cuadrática entre los grupos por la media cuadrática residual. Un valor F alto indica que la variabilidad explicada por las diferencias entre los grupos es considerablemente mayor que la variabilidad dentro de los grupos. En este caso, un valor de F tan elevado sugiere una diferencia significativa entre los grupos.
5. **p-valor**:
   - El **p-valor** es menor que **0.001**, lo que indica que las diferencias observadas entre las medias de los grupos son altamente significativas. Esto significa que la probabilidad de que las diferencias sean producto del azar es muy baja, lo que nos lleva a rechazar la hipótesis nula, que establece que no existen diferencias significativas entre los grupos.

El análisis ANOVA muestra que hay una **diferencia estadísticamente significativa** entre los grupos, dado el valor elevado del estadístico F (**49.6**) y un **p-valor menor que 0.001**. Esto respalda la conclusión de que los grupos son significativamente diferentes en cuanto a la variable de interés.
Este análisis confirma los hallazgos anteriores, donde se observaba una diferencia en las medidas centrales de los grupos, sugiriendo que la variable estudiada tiene un efecto real y significativo sobre los resultados observados en los distintos grupos.

## Conclusiones

Los resultados obtenidos a través de las pruebas estadísticas realizadas en este estudio demuestran de manera concluyente que la gamificación aplicada en la enseñanza de la factorización en matemáticas tuvo un **impacto positivo** y **significativo** en el grupo experimental en comparación con el grupo control. Al comparar ambos grupos, el análisis descriptivo muestra que el **grupo experimental** (que utilizó los rompecabezas como herramienta didáctica) obtuvo una **media superior** de **7.52** frente a **5.26** en el grupo control, con una diferencia de **2.26 puntos** en las medias.

El análisis de la **Prueba T para muestras independientes** también refuerza estos resultados, ya que los valores de **T de Student**, **T de Welch** y **U de Mann-Whitney** indican una diferencia estadísticamente significativa entre ambos grupos, con un **p-valor menor a 0.001** en todas las pruebas. Esto permite rechazar la hipótesis nula, que proponía que no había diferencia en el aprendizaje entre los grupos, en favor de la hipótesis alternativa que sostiene que la gamificación influye positivamente en el aprendizaje.

Por su parte, el **ANOVA** corroboró estos hallazgos al mostrar un valor **F elevado de 49.6** y un **p-valor también menor a 0.001**, lo cual confirma la existencia de una **diferencia significativa** entre los grupos en términos de aprendizaje. Estas pruebas dejan claro que los estudiantes del grupo experimental, que participaron en actividades gamificadas, lograron un **rendimiento superior** en comparación con aquellos que recibieron una enseñanza tradicional.

La implementación de la gamificación (rompecabezas) como estrategia educativa en la enseñanza de las matemáticas ha demostrado ser **altamente eficaz** para mejorar el rendimiento académico de los estudiantes. Los resultados estadísticos sugieren que esta metodología promueve un aprendizaje más significativo y efectivo, destacándose como una herramienta valiosa para futuras prácticas pedagógicas en áreas que tradicionalmente presentan desafíos de aprendizaje.

## Referencias bibliográficas

Álvarez, A. and Norailith, P. (2019). la gamificación como experiencia de aprendizaje en la educación. Revista Docentes 2 0, 6(4), 19-23. https://doi.org/10.37843/rted.v6i4.30

Andrade, C. A. A., & Quijano, O. F. P. (2023). Teaching Quadratic Equation using Symbaloo's Lessons Plan. Revista Científica Sinapsis, 23(1).

Aray Andrade, A., Guerrero Alcívar, Y., Navarrete Ampuero, S., & Montenegro Palma, L. (2019). La matematización como estrategia para la comprensión de la realidad y la gestión del desarrollo argumentativo. Revista de Ciencias Humanísticas y Sociales (ReHuSo), 4(3), 74-83.

Aray, C., Guerrero, Y., Montenegro, L., & Navarrete, S. (2020). La superficialidad en la enseñanza de la trigonometría en el bachillerato y su incidencia en el aprendizaje del cálculo en el nivel universitario. ReHuSo, 5(2), 62-69. Retrieved from https://revistas.utm.edu.ec/index.php/Rehuso/ar ticle/view/2377/2542

Ballén Novoa, J. O. (2012). El álgebra geométrica como recurso didáctico para la factorización de polinomios de segundo grado. Departamento de Matemáticas.

Bazurto Fernández, J., Aray Andrade, C., Navarrete Ampuero, S., Montenegro Palma, L., & Guerrero Alcívar, Y. (2021). Contribución del ajedrez al aumento de la capacidad de comprensión matemática. Revista de Ciencias Humanísticas y Sociales (ReHuSo), 6(1), 144-152.

Bodnar, C. A., Anastasio, D., Enszer, J. A., & Burkey, D. D. (2016). Engineers at play: Games as teaching tools for undergraduate engineering students. Journal of Engineering Education, 105(1), 147-200.Rizzo, K., & Roumieu, S. (2000). Matemática polimodal I. Sainte Clare.

Carreño, J. G., Garcia, L. A. M., Andrade, C. A. A., Montenegro, L., & Alcívar, Y. G. (2024). Gamificación: Una Herramienta Innovadora para Enseñar Autovalores y Autovectores. Ciencia Latina Revista Científica Multidisciplinar, 8(2), 4064-4075.

Díaz, O. B., Andrade, C. A., Alcívar, Y. G., & Palma, L. M. (2023). La formulación y tratamiento de problemas para el logro de un aprendizaje significativo de las matemáticas. Serie Científica de la Universidad de las Ciencias Informáticas, 16(12), 204-213.

García Azcárate, A. C. (2019). Matemáticas con juegos: Aprender y disfrutar. Épsilon.

Gede, I. K., & Piartini, P. S. (2018). Pengaruh Kepemimpinan Terhadap Kinerja Karyawan Yang Dimoderasi Oleh Motivasi Kerja Pada Bpr Se-Kecamatan Sukawati Gianyar. E-Jurnal Ekonomi Dan Bisnis Universitas Udayana, 4(7), 2337-3067.

Hanus, M. D., & Fox, J. (2015). Assessing the effects of gamification in the classroom: A longitudinal study on intrinsic motivation, social comparison, satisfaction, effort, and academic performance. Computers & education, 80, 152-161.

Hunicke R, Leblanc M, Zubek R. MDA: un enfoque formal para el diseño y la investigación de juegos. En En proceso. XIX Congreso Nacional de Inteligencia Artificial; 2001; San José, CA: AAAI Press. pag. 1-5.

Hunicke, R., LeBlanc, M., Zubek, R., & Rivero, E. (2001). MDA: Un enfoque formal sobre el diseño y la investigación de juegos. In En proceso. XIX Congreso Nacional de Inteligencia Artificial (pp. 1-5).

Lucas Avila, G. E. ., & Aray Andrade, C. A. . (2023). Geogebra como herramienta didáctica para el fortalecimiento del aprendizaje de secciones cónicas en bachillerato. Revista Científica Arbitrada Multidisciplinaria PENTACIENCIAS, 5(5), 386–400.

Quijano, O. F. P., Andrade, C. A. A., Cano, H. C., Almeida, B. J. V., & Rodríguez, C. A. M. (2023). Optimización del aprendizaje de dominio y rango de funciones reales utilizando Lesson Plans de Symbaloo. Polo del Conocimiento: Revista científico-profesional, 8(12), 664-678.

Tanya, Evans., Sergiy, Klymchuk., Mike, Thomas. (2018). Puzzle-based Learning in University Mathematics: Students’ Perspectives

**Conflicto de intereses:**

Los autores declaran que no existe conflicto de interés posible.

**Financiamiento:**

No existió asistencia financiera de partes externas al presente artículo.

**Nota:**

El artículo no es producto de una publicación anterior